GAMMES NATURELLES

Yves HELLEGOUARCH, CAEN

"Si votre idée des gammes et de la justesse est basée sur l'accord du piano vous trafiquez dans la supercherie, pour dire les choses crûment ! Cette supercherie fut partiellement approuvée par J.S. Bach et reçut l'appui total de son fils C.P.E. Bach, mais je ne pense pas que la seule vertu de ce nom illustre la préserve de toute critique !".

[Bunting]

PRÉAMBULE

Le but de ce travail n'est pas de donner un fondement mathématique à une méthode d'accordage des instruments à clavier [Cordier] mais plutôt d'étudier certains faits qui appartiennent à la tradition et à l'intuition des instrumentistes à cordes.

Quant on déplace un doigt de la main gauche sur une corde de violon, *sans appuyer*, il se produit :

1°) des phénomènes acoustiques (formation d'harmoniques naturelles)
2°) que l'instrumentiste doit interpréter à l'aide de la culture musicale qu'il a reçue.

Ces faits appartiennent plus à l'arithmétique qu'à l'analyse réelle car la hauteur des harmoniques est une fonction arithmétique discontinue de la position du doigt sur la corde (quand on *appuie* le doigt, on retrouve une fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ classique). Et, comme on le sait depuis longtemps [Brun], ils se rattachent à la théorie de l'approximation.

1. Introduction

Bien que le niveau des mathématiques utilisées ici ne dépasse pas celui des classes préparatoires aux grandes écoles, il est certain que cet article est plus accessible aux mathématiciens qu'aux musiciens.

Mais les motivations des définitions et des buts de ce travail peuvent paraître mystérieuses aux non-musiciens. Aussi présenterai-je un certain nombre de remarques, bien connues des musiciens, qui conduisent à un point de vue que les paragraphes suivants vont développer d'une manière abstraite (trop abstraite !).

1,1) Pour des raisons plus ou moins claires, on considère généralement que la base de la musique occidentale est la gamme chromatique tempérée [de Candé] qui est le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ engendré par $2^{\frac{1}{12}}$, sous-groupe que nous noterons S.

1,2) Il n'est pas question de répéter ici tout le mal qui en a été dit [Hindemith]. Bornons-nous à signaler qu'un piano accordé selon cette gamme sonne tout à fait faux ([Leipp] p. 134) et que cette gamme paraît inadéquate pour l'étude de l'harmonie.

1,3) En termes mathématiques les difficultés proviennent de ce que :

$$S \cap \mathbf{Q}_+^* = \langle 2 \rangle$$

or les oreilles des musiciens et les instruments de musique aiment les "fractions simples". Une expérience facile à réaliser permet de s'en rendre compte : si l'on pose légèrement un doigt sur une corde de violon en un endroit *approchant* $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de sa longueur, la corde produit un son dont la fréquence fondamentale est *exactement* trois fois celle de la "corde à vide".

Nous appellerons cette remarque le "principe d'Euler" car L. Euler disait déjà en 1766 : "l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible".

1,4) Les fractions les plus simples sont $\frac{1}{1}$(unisson) $\frac{2}{1}$ (octave) $\frac{3}{2}$ (quinte juste) $\frac{4}{3}$ (quarte juste) etc... Si l'on appelle "hauteur" de la fraction irréductible $\frac{r}{s}$ le nombre $h(\frac{r}{s}) = \sup(r,s)$, les fractions précédentes se suivent dans l'ordre des hauteurs croissantes, d'où une classification des intervalles par ordre de "dissonance" croissante qui a un caractère d'objectivité qui a frappé les musiciens ([Hindemith] p. 55, expériences de C. Stumpf [de Candé] t. II, p. 187, etc...).

1,5) Pour utiliser cette notion de hauteur, on est conduit à chercher des gammes de nombres rationnels (h s'étend bien aux nombres algébriques, mais son extension ne correspond plus à l'intuition harmonique [Hellegouarch,1] et on ne peut appliquer raisonnablement cette notion de hauteur à S). Une "gamme naturelle" sera donc un **sous-ensemble** de $\mathbf{Q}_+^*$ muni d'une certaine structure de groupe par laquelle il sera isomorphe à $\mathbf{Z}$.

1,6) La méthode classique d'accord des pianos par quintes et octaves [Leipp] fournit l'idée de base, nous allons la préciser.

Supposons que l'on veuille accorder un piano dont le "la" est juste. Un procédé consiste à parcourir le "cycle" des quintes :

la, ré, sol, do, fa, si♭, mi♭

la♭, ré♭, sol♭, do♭, fa♭, si♭♭

En fait, si les quintes sont "justes" (égales à $\frac{3}{2}$) et non "tempérées" (égales à $2^{\frac{7}{12}}$) on ne peut pas retomber sur un "la", car l'équation :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^x$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbf{N}$.

Deryck Cooke [Cooke] exprime de ce fait de manière frappante en disant : "alors que l'équation désirée musicalement est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$, l'équation mathématique correcte est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}013642\ldots$''.

Exprimé mathématiquement, ce que le musicien souhaite c'est imposer la *relation :*

$$r = \frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1$$

dans le *groupe abélien libre* $<2,3>$.

Si, finalement, on applique le principe d'Euler pour trouver un *système de représentants* des classes de $<2,3>$ modulo $<r>$ on trouve (miraculeusement !) la ''gamme de Pythagore'' telle qu'elle est décrite dans les livres d'Histoire de la Musique [de Candé].

2. Une propriété des sous-groupes de $\mathbf{Q}_+^*$

$\mathbf{Q}_+^*$ désigne le groupe multiplicatif des rationnels >0. Il est bien connu que $\mathbf{Q}_+^*$ est un groupe libre de rang infini dont l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est une base ; cela signifie que tout rationnel $r>0$ s'écrit d'une manière et d'une seule :

$$r = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n(p)}$$

avec $n(p) \in \mathbf{Z}$ et $n(p) = 0$ sauf pour un nombre fini de p.

Théorème : Si G est un sous-groupe de $\mathbf{Q}_+^*$ de rang >1, alors G est dense dans $\mathbf{R}_+^*$.

Démonstration :

Puisque G est de rang >1, il existe deux éléments r et s dans G multiplicativement indépendants.

Ceci signifie que Log r et Log s sont linéairement indépendants sur **Q**. Le théorème de Kronecker [Hardy] affirme alors que l'ensemble des nombres de la forme $m \operatorname{Log} r + n \operatorname{Log} s$, pour $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, est dense dans **R**. Donc $<r,s> = \{r^m s^n \; ; \; (m,n) \in \mathbf{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}_+^*$.

Définitions : Nous dirons que p, q, r, etc... sont des nombres *multiplicativement indépendants* dans $\mathbf{Q}_+^*$ si Log p, Log q, Log r, etc... sont linéairement indépendants sur **Q**, et nous noterons par $<p,q>$, $<p,q,r>$, etc... les sous-groupes denses de $\mathbf{Q}_+^*$ engendrés par $\{p,q\}$, $\{p,q,r\}$, etc...

En fait notre but sera une étude de la suite $\mathcal{S}$:

$\mathcal{S}$ $\quad <2,3> \quad <2,3,5> \quad <2,3,5,7> \quad$ etc...

dont nous désignerons l'élément général par G. Et finalement, pour $r = \prod_{p \in \mathcal{T}} p^{n(p)} \in \mathbf{Q}_+^*$, nous poserons [1] :

$$\|r\| = \sum_{p \in \mathcal{T}} |n(p)| \operatorname{Log} p$$

3) Commas

Nous avons montré dans l'introduction l'intérêt des approximations de 1 dans les groupes $G \in \mathcal{S}$; nous appellerons "commas" de G les meilleures de ces approximations et nous en donnerons la définition suivante :

Définition : Soit $G \in \mathcal{S}$ et $a \in G$.

Nous dirons que a est un *comma* de G (ou *meilleure approximation* de 1 dans G) si et seulement si

1) $a \neq 1$

2) $b \in G \setminus \{1\}$ et $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$ entraîne $\|b\| > \|a\|$.

Remarques :

1) Si $a = p_1^{n_1} \ldots p_h^{n_h}$, alors on voit que p.g.c.d. $(n_1, \ldots, n_h) = 1$.

2) Un comma de G ne reste pas toujours une meilleure approximation de 1 dans un plus grand sous-groupe G′ de $\mathcal{S}$.

Par exemple $a = \dfrac{2^8}{3^5}$ est un comma de $<2,3>$ mais n'est pas un comma de $<2,3,5>$ car il existe $b = \dfrac{3^4}{2^4 \times 5} \in <2,3,5>$ tel que $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$ et $\|b\| < \|a\|$.

Le critère élémentaire suivant donne une réponse partielle à cette question.

Critère : Si $G \in \mathcal{S}$ et si $x = \dfrac{a+1}{a} \in G$, avec $a \in \mathbf{N}$. Alors a est un comma de G.

Démonstration :

Soit une fraction irréductible $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}_+^*$ telle que $\dfrac{m}{n} > 1$. Montrons que si $\left|\operatorname{Log} \dfrac{m}{n}\right| < \left|\operatorname{Log} \dfrac{a+1}{a}\right|$ alors $\left\|\dfrac{m}{n}\right\| > \left\|\dfrac{a+1}{a}\right\|$.

(1) Si l'on considère $\mathbf{Q}_+^*$ comme un $\mathbf{Z}$-module, $\| \; \|$ est analogue à une norme puisque l'on a :

α) $\|r\| \geqslant 0$ et $\|r\| = 0$ ssi $r = 1$

β) $\|rr'\| \leqslant \|r\| + \|r'\|$

γ) $\|r^n\| = |n| \, \|r\|$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$

1) Remarquons d'abord que $n > a$ (on suppose naturellement que n est positif). En effet $n \leqslant a$ entraîne que $\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{a+1}{a}$, et comme $m > n$, on a :

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{n+1}{n} \leqslant \frac{a+1}{a}$$

ou encore :

$$\operatorname{Log} \frac{m}{n} \leqslant \operatorname{Log} \frac{a+1}{a}$$

2) Puisque $m > n$, on a $m \geqslant n+1 > a+1$, d'où :

$$\|m\| + \|n\| > \|a+1\| + \|a\|$$

et comme m et n (resp. $a+1$ et a) sont premiers entre eux, on a :

$$\left\| \frac{m}{n} \right\| = \|m\| + \|n\| \quad (\text{resp. } \left\| \frac{a+1}{a} \right\| = \|a+1\| + \|a\|)$$

ce qui nous donne l'inégalité cherchée.

4) Commas des groupes de rang 2

Nous allons généraliser légèrement la situation du paragraphe 2 en prenant un sous-groupe *quelconque* de rang 2 de $\mathbf{Q}_+^*$ que l'on notera encore G. Si $\{p,q\}$ est une base de G, p et q sont multiplicativement indépendants et la recherche des commas de G équivaut à la recherche des couples $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$, tels que $(x,y) \neq (0,0)$ et tels que $x \operatorname{Log} p + y \operatorname{Log} q$ soit voisin de 1. Ainsi $-\frac{x}{y}$ doit être une "bonne approximation" de l'irrationnel $\alpha = \frac{\operatorname{Log} q}{\operatorname{Log} p}$.

La recherche des bonnes approximations de α se fait habituellement par l'algorithme des fractions continues [Stark] : on construit ainsi une suite de fractions $\frac{a_n}{b_n}$, les "convergentes" de α, convergeant vers α selon le schéma :

$$\frac{a_o}{b_o} < \frac{a_2}{b_2} \ldots < \alpha < \ldots < \frac{a_3}{b_3} < \frac{a_1}{b_1} .$$

En posant (un peu arbitrairement) :

$$(x_n,y_n) = ((-1)^{n-1}a_n,(-1)^n b_n)$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 1 : La suite des rationnels $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ est monotone décroissante et tend vers 1. De plus, on a :

$$p^{\frac{1}{2|y_{n+1}|}} < r_n < p^{\frac{1}{|y_{n+1}|}} .$$

Démonstration :

1) On sait que $a_n - b_n\alpha$ a le signe de $(-1)^{n-1}$, [Stark], donc :

$$x_n + y_n\alpha = (-1)^{n-1}[a_n - \alpha b_n] > 0$$

soit $r_n > 1$.

2) Maintenant :

$$\frac{\operatorname{Log} r_{n+1}}{\operatorname{Log} r_n} = \frac{x_{n+1} + \alpha y_{n+1}}{x_n + \alpha y_n} = -\frac{a_{n+1} - \alpha b_{n+1}}{a_n - \alpha b_n}.$$

Or on sait [Stark] que :

$$\left|\frac{a_{n+1} - \alpha b_{n+1}}{a_n - \alpha b_n}\right| < 1$$

d'où :

$$\frac{\operatorname{Log} r_{n+1}}{\operatorname{Log} r_n} < 1.$$

3) Les deux inégalités de l'énoncé équivalent à :

$$\frac{1}{2b_{n+1}} < x_n + \alpha y_n < \frac{1}{b_{n+1}}$$

soit encore à :

$$\frac{1}{2b_{n+1}} < |a_n - \alpha b_n| < \frac{1}{b_{n+1}}$$

ce qui est bien connu [Stark].

On peut se demander maintenant si l'on obtient bien ainsi des commas de G. Pour répondre à cette question nous utiliserons le résultat suivant [Dubois] : à partir d'un certain rang les convergentes de α correspondent aux meilleures approximations de α pour la norme :

$$N(x,y) = [x^2 + \alpha^2 y^2]^{1/2}.$$

Théorème 2 : A partir d'un certain rang les nombres r_n définis dans le théorème 1 sont les commas de G.

Démonstration :

1) Montrons qu'à partir d'un certain rang r_n est un comma.

Soit $\frac{a_n}{b_n}$ la convergente correspondante et $r = p^a q^{-b} \in G$, la condition :

$$\operatorname{Log} r_n > |\operatorname{Log} r|$$

entraîne à partir d'un certain rang :

$$2(\log p)^2[N(a_n,b_n)]^2 < 2(\operatorname{Log} p)^2[N(a,b)]^2.$$

Or :

$$2(\mathrm{Log}\, p)^2[N(a,b)]^2 = (a\, \mathrm{Log}\, p - b\, \mathrm{Log}\, q)^2 + (a\, \mathrm{Log}\, p + b\, \mathrm{Log}\, q)^2$$
$$= |\mathrm{Log}\, r|^2 + \|r\|^2$$

d'où :

$$|\mathrm{Log}\, r_n|^2 + \|r_n\|^2 < |\mathrm{Log}\, r|^2 + \|r\|^2$$

ce qui entraîne bien :

$$\|r_n\| < \|r\| .$$

2) Montrons qu'à partir d'un certain rang tout comma est un r_n. Soit un comma $r = p^a q^{-b} \in G$, assez proche de 1, nous allons montrer que r est une meilleure approximation de α au sens ordinaire du terme, c'est-à-dire que :

$$|a' - b'\alpha| < |a - b\alpha|$$

entraîne $|a|' > |a|$ et $|b'| > |b|$. Il en résultera que r est un r_n([Stark]).

Supposons que Log p < Log q et prenons ε positif tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ Log p, supposons de plus que r est tel que :

$$|a\, \mathrm{Log}\, p - b\, \mathrm{Log}\, q| < \varepsilon.$$

Alors $|a'\mathrm{Log}\, p - b'\mathrm{Log}\, q| < |a\, \mathrm{Log}\, p - b\, \mathrm{Log}\, q|$

entraîne :

$$b\ \mathrm{Log}\, q = a\, \mathrm{Log}\, p + \eta$$
$$b'\, \mathrm{Log}\, q = a'\, \mathrm{Log}\, p + \eta'$$

avec $\sup(|\eta|, |\eta'|) < \varepsilon$.

On en déduit que :

$$\|r'\| = |a'\mathrm{Log}\, p + b'\, \mathrm{Log}\, q| = |2a'\, \mathrm{Log}\, p + \eta'|$$
$$\|r\| = |a\, \mathrm{Log} + b\, \mathrm{Log}\, q| = |2a\, \mathrm{Log}\, p + \eta| .$$

Comme on sait que $\|r'\| > \|r\|$, il vient :

$$|a'| > |a| - \frac{|\eta| + |\eta'|}{2\, \mathrm{Log}\, p} > |a| - \frac{\varepsilon}{\mathrm{Log}\, p} > |a| - 1$$

Finalement $|a'| \geqslant |a|$ et, de même, $|b'| \geqslant |b|$.

Mais $|a'| = |a|$ (respectivement $|b'| = |b|$) et $|a'\, \mathrm{Log}\, p - b'\, \mathrm{Log}\, q| < |a\, \mathrm{Log}\, p - b\, \mathrm{Log}\, q| < \varepsilon$ entraînent $|b'| = |b|$ (respectivement $|a| = |a'|$) ce qui est absurde.

Ainsi $|a'| > |a|$ et $|b'| > |b|$.

5. Groupes quotients et gammes de Pythagore

Nous allons d'abord considérer un sous-groupe quelconque de rang 2 de $\mathbf{Q}_+^*$ (toujours noté G) et un comma r_n de G. Notre premier but est l'étude du groupe quotient $G/_{<r_n>}$.

Ensuite nous choisirons $G = <2,3>$ ce qui nous donnera des gammes que j'appellerai "gammes de Pythagore".

5,1) Soit $G = <p,q>$ et $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ comme dans le paragraphe 4. On introduira le nombre r_{n-1} et on utilisera la relation classique :

$$x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^{n-1}$$

Théorème :

Désignons par H le groupe $<r_n>$. Alors G/H est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$ qui est engendré par la classe de r_{n-1}.

Remarque :

Rappelons que les signes de x_n et y_n sont choisis pour que l'on ait toujours $p^{x_n} q^{y_n} > 1$.

Démonstration :

Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que $\mathbf{Z}^2/(x_n,y_n)\mathbf{Z}$ est un groupe sans torsion et que la classe de (x_{n-1},y_{n-1}) en est un générateur.

1) Groupe sans torsion

Montrons que si $h>0$:

$$h(x,y) \in (x_n,y_n)\mathbf{Z}$$

entraîne que $(x,y) = k(x_n,y_n)$, $k \in \mathbf{Z}$.

En effet, cette relation équivaut à :

$$\begin{cases} hx = \ell x_n \\ hy = \ell y_n \end{cases}$$

Comme x_n et y_n sont premiers entre eux, on voit que h divise p.g.c.d. $(\ell x_n, \ell y_n) = \ell$, donc si l'on pose :

$$\ell = hk$$

et si l'on simplifie par h, on a le résultat ci-dessus.

2) Générateur

Dire que la classe de (a,b) est un générateur de $\mathbf{Z}^2/(x_n,y_n)\mathbf{Z}$ revient à dire que tout $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ s'écrit sous la forme :

$$(x,y) = h(a,b) + k(x_n,y_n)$$

donc que (a,b) et (x_n,y_n) constituent une base de $\mathbf{Z}^2$, ce qui est le cas si $(a,b) = (x_{n-1},y_{n-1})$.

Théorème : Dans $\frac{G}{H}$ la classe de p(resp. q) est égale à $|y_n|$ fois (resp. $|x_n|$ fois) celle de r_{n-1}.

Ainsi l'indice du sous-groupe de $\frac{G}{H}$ engendré par la classe de p (resp. q) est égal à $|y_n|$ (resp. $|x_n|$).

Démonstration :

Il suffit de démontrer cette propriété pour la classe de p, ce qui équivaut à :

$$p \equiv (p^{x_{n-1}} q^{y_{n-1}})^{|y_n|}$$

ou bien (en notation additive) :

$$(1,0) \equiv |y_n|(x_{n-1},y_{n-1})$$

Si n est pair :

$y_n > 0$ et on doit avoir

$$(1,0) \equiv (y_n x_{n-1}, y_n y_{n-1}) \text{ modulo } (x_n,y_n)\mathbf{Z}$$

Or on a :

$$x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1} = (-1)^n$$

d'où :

$$y_n x_{n-1} = x_n y_{n-1} + 1$$

Si n est impair :

$y_n < 0$ et on doit avoir :

$$(1,0) \equiv (-y_n x_{n-1}, -y_n y_{n-1})$$

Or on a :

$$-y_n x_{n-1} = -x_n y_{n-1} - (-1)^n$$

Convention : Suivant le "principe d'Euler" nous représenterons une classe de G/H par un élément de plus petite hauteur (par "hauteur" d'une fraction irréductible $\frac{r}{s} \in \mathbf{Q}_+^*$ nous entendons sup(r,s)). En général, un tel représentant est unique, et il l'est nécessairement lorsque $x_n y_n$ est impair. S'il ne l'est pas, il y en a au plus deux dans certaines classes...

5,2) Examinons maintenant le cas particulier

$$F = \langle 2,3 \rangle.$$

Nous prendrons $p=2$ et $q=3$ et $|y_n|$ sera appelé le *nombre de degrés* du groupe $G/<r_n>$. Il n'est peut-être pas inutile de donner une définition générale du nombre de degrés d'un groupe G/H (resp. une gamme T).

Définition : Le nombre de degrés du groupe G/H (resp. de la gamme T) est l'indice du sous-groupe engendré par la classe de 2 (resp. par 2).

Le calcul des convergentes de $\frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$ donne les commas(1) de G (voir paragraphe 4) :

$$\boxed{1 < \ldots < \frac{3^{53}}{2^{84}} < \frac{2^{65}}{3^{41}} < \frac{3^{12}}{2^{19}} < \frac{2^8}{3^5} < \frac{3^2}{2^3} < \frac{2^2}{3} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}}$$

Dans le tableau ci-dessus, nous nous sommes bornés à écrire les commas $r>1$.

J'appellerai commas de Pythagore, Janko et Mercator les trois derniers cómmas, car Pythagore, Janko et Mercator ont étudié des gammes ayant (respectivement) 12, 41 et 53 degrés [Dautrevaux].

n = 1 :

Z	0	1
fréquence	1	2

$$\boxed{\text{relation } \frac{2^2}{3} \equiv 1}$$

n = 2 : tonique, quinte, octave (2 degrés)

Z	0	1	2
fréquence	1	$\frac{3}{2}$	2

$$\boxed{\frac{3^2}{2^3} \equiv 1}$$

n = 3 : gamme pentaphonique (5 degrés)

Z	0	1	2	3	4	5
fréquence	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^4}{3^2}$	2

$$\boxed{\frac{2^8}{3^5} \equiv 1}$$

Remarque :

B. Parzysz donne les fréquences $\frac{3^4}{2^6}$ et $\frac{3^3}{2^4}$ pour les degrés 2 et 4, ces fréquences sont équivalentes aux nôtres [Parzysz].

(1) C'est une constatation.

n = 4 : gamme à douze degrés

$$\boxed{\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1}$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquence	1	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2

Le tableau ci-après donne le prolongement de la gamme jusqu'au 60ième degré. On constate que les fréquences sont croissantes (1).

n = 5 : gamme à 41 degrés (Janko)

$$\boxed{\frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv 1}$$

Voir tableau ci-après : on constate que les fréquences sont croissantes (1).

n = 6 : gamme à 53 degrés (Mercator)

$$\boxed{\frac{3^{53}}{2^{84}} \equiv 1}$$

Voir tableau ci-après : on constate que les fréquences sont croissantes (1).

au-delà, le nombre de degrés des gammes est : 306, 665, 15601, 31867, 79335, 111202, 190537, 10590737, 10781279, etc.

Remarque : Contrairement à ce que l'on pourrait croire en lisant le tableau des 60 premiers degrés de la gamme de Pythagore à 12 degrés, on ne passe pas d'une octave à celle immédiatement au-dessus en multipliant les fréquences par 2. Au-delà de l'audible des irrégularités apparaissent, par exemple :

$$h(2^{19} \cdot \frac{2^8}{3^5}) \leqslant h(2^{19} \cdot \frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}})$$

est faux.

(1) Vérification de P. TOFFIN.

PYTHAGORE

$$\frac{2^8}{3^5} \equiv \sqrt[12]{2} \equiv \sqrt[19]{3} \qquad \frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2	$\frac{2^9}{3^5}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^6}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^5}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{3^6}{2^8}$	3

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$\frac{2^8}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^6}$	2^2	$\frac{2^{10}}{3^5}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^7}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^4}$	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{3^6}{2^7}$	2.3	$\frac{2^9}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^2}$	$\frac{2^6}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^5}$	2^3	$\frac{2^{11}}{3^5}$	3^2	$\frac{2^8}{3^3}$

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\frac{3^4}{2^3}$	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{3^6}{2^6}$	$2^2.3$	$\frac{2^{10}}{3^4}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^7}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^4}$	2^4	$\frac{2^{12}}{3^5}$	2.3^2	$\frac{2^9}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^2}$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{3^6}{2^5}$	$2^3.3$	$\frac{2^{11}}{3^4}$	3^3	$\frac{2^8}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^3}$	2^5

GAMME DE PYTHAGORE À 41 DEGRÉS :

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv \sqrt[41]{2} \equiv \sqrt[65]{3} \qquad \frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^{2}}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$
C *do*			$D^\flat$ *ré*$^\flat$				D *ré*			$E^\flat$ *mi*$^\flat$				E *mi*			F *fa*			

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$	$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{12}}{3^{7}}$	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2
$F^\#$ *fa*$^\#$			G *sol*			$A^\flat$ *la*$^\flat$				A *la*			$B^\flat$ *si*$^\flat$				B *si*			C *do*

GAMME DE PYTHAGORE À 53 DEGRÉS :

(Correspond au "Comma de Holder")

$$\frac{2^{65}}{3^{41}} \equiv \sqrt[53]{2} \equiv \sqrt[84]{3} \qquad \frac{2^{84}}{3^{53}} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$\frac{2^{65}}{3^{41}}$	$\frac{2^{46}}{3^{29}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{35}}{3^{22}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	$\frac{2^{62}}{3^{39}}$	$\frac{2^{43}}{3^{27}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	$\frac{2^{51}}{3^{32}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$
C do				$D^{\flat}$ ré$^{\flat}$					D ré				$E^{\flat}$ mi$^{\flat}$				

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	$\frac{2^{59}}{3^{37}}$	$\frac{2^{40}}{3^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^{2}}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{2^{48}}{3^{40}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$\frac{2^{56}}{3^{35}}$	$\frac{2^{37}}{3^{23}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{2^{45}}{3^{28}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$
E mi				F fa					$F^{\sharp}$ fa$^{\sharp}$				G sol				$A^{\flat}$ la$^{\flat}$

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	$\frac{2^{53}}{3^{33}}$	$\frac{2^{34}}{3^{21}}$	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{42}}{3^{26}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{31}}{3^{7}}$	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{39}}{3^{24}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2
				A la				$B^{\flat}$ si$^{\flat}$					B si				C do

6. Gammes de Zarlino

Eugène DUBOIS a mis au point un algorithme qui donne les commas de G = $<2,3,5>$.

Le calcul, fait sur ordinateur, donne la suite suivante :

$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{5}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2\times 5}{3^2}, \frac{2^4}{3\times 5}, \frac{5^2}{2^3\times 3}, \frac{3^4}{2^4\times 5}$ = Comma de Didyme, $\frac{2^{11}}{3^4\times 5^2}$,

$\frac{5^6}{2^6\times 3^5}, \frac{3^8\times 5}{2^{15}}, \frac{2^{38}}{3^2\times 5^{15}}, \frac{2\times 5^{18}}{3^{27}}, \frac{3^{10}\times 5^{16}}{2^{53}}, \frac{2^{54}\times 5^2}{3^{37}}, \frac{3^{62}}{2^{17}\times 5^{35}}$, etc...

Nous allons considérer le groupe quotient de G = $<2,3,5>$ par le sous-groupe H engendré par deux fractions $r = 2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$ et $r' = 2^{\alpha'}\, 3^{\beta'}\, 5^{\gamma'}$.

Théorème.

1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha''x + \beta''y + \gamma''z$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est égal à 1, alors G/H est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a 3^b 5^c$ est un générateur de G/H équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1.$$

Démonstration :

1) Dire que p.g.c.d. $(\alpha'',\beta'',\gamma'') = 1$ équivaut à l'existence de $(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3$ tel que

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \pm 1$$

en vertu du théorème de Bezout.

2) Mais cette dernière condition signifie que (a,b,c), (α,β,γ) et (α',β',γ') constituent une base de $\mathbf{Z}^3$.

Si nous posons $K = \mathbf{Z}(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{Z}(\alpha',\beta',\gamma')$, nous voyons que $\mathbf{Z}^3/K$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$ et engendré par la classe de (a,b,c). Mais ceci est juste la forme additive du résultat que nous voulons obtenir.

Exemples :

Nous nous proposons d'"améliorer" les gammes de Pythagore, correspondant aux groupes $<2,3>$ / $<r>$, que nous avons obtenues dans le paragraphe 5.

Pour chaque valeur de r ($r = \frac{2^2}{3}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^{12}}{2^{19}}$, etc.) nous cherchons un comma r' de $<2,3,5>$ qui satisfasse au théorème précédent, on posera alors $H = <r,r'>$.

Soit φ la projection canonique $G \longrightarrow G/H$ et soit P l'image $\varphi(<2,3>)$. Comme $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap <2,3> = <r>$ on voit que P est isomorphe à la gamme de Pythagore dont on était parti (mais certains représentants de cette gamme doivent être remplacés par des éléments de $<2,3,5>$ de plus petite hauteur).

Finalement le nombre de degré de G/H est égal à celui de P multiplié par l'indice de P dans G/H.

Lorsque cet indice est égal à 1, on dira que la gamme obtenue *affine* notre gamme de Pythagore, sinon on dira que l'on a obtenu une *"nouvelle gamme"*.

1) $r = \frac{2^2}{3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

2) $r = \frac{3^2}{2^3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

3) $r = \frac{2^8}{3^5}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

4) $r = \frac{3^{12}}{2^{19}}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{5^2}{2^3\times3}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{5^6}{2^6\times3^5}$
s	$\frac{2^8}{2^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$

On voit donc apparaître des phénomènes intéressants dans les troisièmes colonnes des trois premiers tableaux ainsi que dans les trois dernières colonnes du dernier tableau, nous allons étudier en détail les gammes correspondantes que nous désignerons sous le nom général de gammes de Zarlino (du nom de la quatrième du dernier tableau).

$(r,r') = (\frac{2^2}{3}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: deux degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	2

$(r,r') = (\frac{3^2}{2^3}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: quatre degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = (\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: dix degrés(1) (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquences	1	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = (\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{5^2}{2^3\times3})$: vingt-quatre degrés (nouvelle gamme)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^6}{2^7\times5}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^6\times5}{3^5}$

(1) L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 10 degrés (Luc Etienne).

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times 5}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{2^3\times 5}{3^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^5}{2^5\times 5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^8\times 5}{3^6}$

20	21	22	23	24
$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{2^5\times 5}{3^4}$	2

$(r,r') = (\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4.5})$: douze degrés, gamme de Zarlino proprement dite.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$

10	11	12
$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2

voir plus loin un tableau des fréquences des 60 premiers degrés (ces fréquences sont croissantes).

Dans le dernier cas s est plus proche de 1 que r et la gamme que l'on peut construire (elle a 72 degrés) n'est pas croissante.

Il est donc plus naturel de prendre r comme générateur et $r' \equiv 1$ et $s \equiv 1$ comme relations. Voici le résultat :

$(r',s) = \left(\frac{5^6}{2^6\times 3^5}, \frac{3^4}{2^4\times 5}\right)$ gamme à 19 degrés.(1)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{2^7}{5^3}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5^3}{2^2\times 3^3}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^5}{5^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^2\times 5}{2^5}$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2\times 3^2}{5^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^7}{3\times 5^2}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	$\frac{2^4\times 3}{5^2}$	2

(1) L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 19 degrés.

ZARLINO

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1, \qquad \frac{3^4}{2^4 . 5} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times5}{2^3}$	2	$\frac{2^5}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^2.3}{5}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{5\times3^2}{2^4}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{5^2}{2.3}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^3.3}{5}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^3}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	$\frac{2^2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^4.3}{5}$	2.5	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^3.3^2}{5}$	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{5^2.2}{3}$	2.3^2	$\frac{2^5.3}{5}$	$2^2.5$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$\frac{2^4.3^2}{5}$	2.3.5	2^5

7) Introduction de la septième harmonique

La seule difficulté pour traiter le cas $G = <2,3,5,7>$ consiste à en déterminer les commas.

Eugène DUBOIS a calculé les meilleures approximations de 1 dans le groupe G en remplaçant $\|2^x 3^y 5^z 7^t\|$ par :

$$[x^2(\text{Log } 2)^2 + y^2(\text{Log } 3)^2 + z^2(\text{Log } 5)^2 + t^2(\text{Log } 7)^2]^{1/2}.$$

Il a obtenu la suite de fractions :

$$\frac{2}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2.3}{5}, \frac{7}{2.3}, \frac{2.5}{3^2}, \frac{3.5}{2.7}, \frac{3.7}{2^2.5}, \frac{2^2.3^2}{5.7}, \frac{7^2}{2^4.3},$$

$$\frac{2^6}{3^2.7}, \frac{3^4}{2^4.5}, \frac{5^2.3^2}{2^5.7}, \frac{2^5.3.5^2}{7^4}, \text{ etc...}$$

et le critère du paragraphe 2 montre que ce sont des commas[1].

Nous allons considérer le groupe quotient de $G = <2,3,5,7>$ par le sous-groupe H engendré par trois fractions :

$$r = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta, \quad r' = 2^{\alpha'} 2^{\beta'} 5^{\gamma'} 7^{\delta'} \quad \text{et} \quad r'' = 2^{\alpha''} 3^{\beta''} 5^{\gamma''} 7^{\delta''}.$$

Le théorème suivant se démontre comme celui du paragraphe 6.

Théorème

1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ y & \beta & \beta' & \beta'' \\ z & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ t & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta''' t$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''')$ est égal à 1, alors G/H est isomorphe $\mathbf{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a 3^b 5^c 7^d$ est un générateur de G/H équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ b & \beta & \beta' & \beta'' \\ c & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ d & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d = \pm 1.$$

(1) Tous les commas ne sont pas obtenus : $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}$, par exemple, manquent.

Montrons, pour terminer ce paragraphe, comment nous pouvons "améliorer" les 60 premiers degrés de la gamme de Zarlino de la page 146.

Nous choisissons $r = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$, $r' = \dfrac{3^4}{2^4.5}$ et $r'' = \dfrac{3^2.5^2}{2^5.7}$.

Nous avons :

$$\begin{vmatrix} x & -19 & -4 & -5 \\ y & 12 & 4 & 2 \\ z & 0 & -1 & 2 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12x + 19y + 28z + 34t$$

et $(a,b,c,d) = (-1,1,1,-1)$ est une solution de l'équation de Bezout qui est de hauteur minimale dans sa classe.

On peut alors reprendre le tableau de la page 146 en remplaçant les éléments qui s'y prêtent par des éléments de hauteur minimale dans leurs classes et on obtient le tableau qui suit.

ZARLINO BIS

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1 \qquad \frac{3^4}{2^4 . 5} \equiv 1 \qquad \frac{3^2 . 5^2}{2^5 . 7} \equiv 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{3.5}{2.7}$	$\frac{2^3}{7}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2^2}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2	$\frac{3.5}{7}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{7}{3}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{2.7}{5}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{3.7}{5}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2.7}{3}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{2^2.7}{5}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	7	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^2.7}{3}$	2.5	$\frac{3.7}{2}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	2.7	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{7^2}{3}$	2.3^2	$\frac{2^3.7}{3}$	$2^2.5$	3.7	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$2^2.7$	2.3.5	2^5

8) Crible

Une des difficultés pratiques que l'on rencontre dans la construction des gammes est de savoir reconnaître si un nombre connu comme élément du $n^{\text{ième}}$ degré est effectivement un élément de plus petite hauteur de sa classe (cette difficulté est la cause des inexactitudes que l'on peut trouver dans le tableau de "Scales" [Hellegouarch 2]).

On peut tourner cette difficulté en écrivant par ordre de hauteur croissante les éléments de G qui sont plus grands que 1. Pour la gamme de Zarlino par exemple, on construira le tableau suivant où x désigne un élément de G, h(x) sa hauteur, n_x le numéro de xH dans G/H et * signifie que le nombre n_x apparait pour la première fois dans le tableau. Pour déterminer n_x on pourra utiliser la relation heuristique

$$n_x \approx 12 \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 2}$$

qui est à rapprocher de l'algorithme de Viggo Brun [Brun] et qui me paraît être mystérieusement efficace.

h(x)	(x,n_x)
1	(1,0*)
2	(2,12*)
3	$(\frac{3}{2},7^*)$ $(3,19^*)$
4	$(\frac{4}{2},5^*)$ $(4,24^*)$
5	$(\frac{5}{4},4^*)$ $(\frac{5}{3},9^*)$ $(\frac{5}{2},16^*)$ $(5,28^*)$
6	$(\frac{6}{5},3^*)$ $(6,31^*)$
8	$(\frac{8}{5},8^*)$ $(\frac{8}{3},17^*)$ $(8,36^*)$
9	$(\frac{9}{8},2^*)$ $(\frac{9}{5},10^*)$ $(\frac{9}{4},14^*)$ $(\frac{9}{2},26^*)$ $(9,38^*)$
10	$(\frac{10}{9},2)$ $(\frac{10}{3},21^*)$ $(10,40^*)$
12	$(\frac{12}{5},15^*)$ $(12,43^*)$
15	$(\frac{15}{8},11^*)$ $(\frac{15}{4},23^*)$ $(\frac{15}{2},35^*)$ $(15,47^*)$

16	$(\frac{16}{15},1^*)$ $(\frac{16}{9},10)$ $(\frac{16}{5},20^*)$ $(\frac{16}{3},29^*)$ $(16,48^*)$
18	$(\frac{18}{5},22^*)$ $(18,50^*)$
20	$(\frac{20}{9},14)$ $(\frac{20}{3},33^*)$ $(20,52^*)$
etc.	

9) Distance harmonique sur $\mathbf{Q}_+^*$

Pour des raisons de commodité, je donne ici une démonstration élémentaire d'un résultat plus général [Hellegouarch, 1].

Théorème

La fonction $(x,y) \longmapsto \operatorname{Log} h(\frac{x}{y})$ est une distance sur $\mathbf{Q}_+^*$.

Démonstration

Nous devons démontrer que :

1) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) \geqslant 0$ et que $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) = 0$ entraîne $x = y$

2) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) = \operatorname{Log} h(\frac{y}{x})$

3) $\operatorname{Log} h(\frac{x}{z}) \leqslant \operatorname{Log} h(\frac{x}{y}) + \operatorname{Log} h(\frac{y}{z})$

Ces conditions équivalent à :

1′) $h(\frac{x}{y}) \leqslant 1$ et $h(\frac{x}{y}) = 1$ entraîne $x = y$

2′) $h(\frac{x}{y}) = h(\frac{y}{x})$

3′) $h(\frac{x}{z}) \leqslant h(\frac{x}{y}) \,.\, h(\frac{y}{z})$

et les deux premières assertions sont évidentes.

La troisième peut s'écrire aussi :

$$h(rr') \leqslant h(r)h(r')$$

avec r et $r' \in \mathbf{Q}_+^*$.

Si r (resp. r') est égal à la fraction irréductible $\frac{n}{d}$ (resp. $\frac{n'}{d'}$) et si rr'

est égal à la fraction irréductible $\frac{n''}{d''}$ on a $d'' \leqslant dd'$ et $n'' \leqslant nn'$. D'où :

$$\sup(d'', n'') \leqslant \sup(d,n) \,.\, \sup(d'n')$$

10) Dissonance des intervalles d'une gamme.

Soit une gamme T construite selon les principes précédents et représentant le groupe quotient G/H et soient x et $y \in T$.

Nous noterons par d la distance harmonique sur $\mathbf{Q}_+^*$ et par $\delta_T(x,y)$ le nombre $d(xH,yH)$.

$\delta_T(x,y)$ sera appelé la "dissonance" de l'intervalle $\frac{y}{x}$ dans la gamme T

Proposition : Si z désigne le représentant de la classe de $\frac{y}{x}$ dans la gamme T, on a :

$$\delta_T(x,y) = \text{Log } h(z).$$

Démonstration :

$d(xH,yH) = \inf\{d(xu,yv) \; ; \; u \text{ et } v \in H\} = \inf\{\text{Log } h(\frac{y}{x} w) \; ; \; w \in H\} = \text{Log } h(z).$

Nous allons montrer maintenant comment cette notion de dissonance permet de retrouver des notions musicales inexplicables à partir de la gamme tempérée S. Dans la suite, P désignera la gamme de Pythagore à 12 degrés, Z celle de Zarlino et Z^* celle de Zarlino-bis.

Hindemith remarque ([Hindemith] p. 55) que bien que le théoriciens de la musique ne soient d'accord sur rien, ils le sont cependant sur l'ordre de "parenté" décroissante des degrés de la gamme.

L'ordre que donne Hindemith est le suivant : unisson, octave, quinte, quarte, sixte majeure, tierce majeure, tierce mineure, etc. (1).

Il ajoute que la quarte augmentée (ou quinte diminuée) se trouve très loin.

Nous allons comparer ce qui se passe dans nos trois gammes :

	unisson	octave	quinte	quarte	sixte majeure	tierce majeure	tierce mineure	sixte mineure	quarte augment.
δ_P	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 27	Log 81	Log 32	Log 128	Log 729
δ_Z	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 25
δ_{Z^*}	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 7

(1) Voir aussi [de Candé] t. 2, p. 186.

On voit que la notion de dissonance dans la gamme de Zarlino reproduit assez bien l'ordre constaté par Hindemith ; nous choisirons donc cette gamme dans la suite :

Z	do	ré ♭	ré	mi ♭	mi	fa	sol ♭	sol	la ♭	la	la #	si	do
	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

10,1) *Justesse expressive*

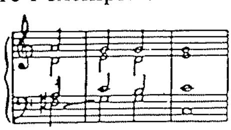
La plupart des instrumentistes à cordes et des chanteurs pratiquent la "justesse expressive" ([Blum] ch. V) c'est-à-dire qu'ils modifient la hauteur des sons qu'ils utilisent par de légers "commas" (ce qui ne change pas la classe modulo H) afin de jouer plus juste en fonction du contexte.

Nous allons illustrer cette pratique par un exemple utilisant la gamme de Zarlino.

Nous présenterons dans un tableau les fréquences des sons des gammes majeures de do, sol, fa et ré. Pour passer des fréquences de do majeur à celles des tonalités ci-dessus on multiplie par $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3^2}{2^3}$.

	do	do #	ré	mi	fa	fa #	sol	la	si ♭	si	do
do maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
sol maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	2
fa maj.	1		$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$		2
ré maj.		$\frac{135}{64}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	

Dans la théorie de la musique, sol maj. et fa maj. sont considérés comme des tonalités voisines de do maj., et ré maj. comme une tonalité voisine de sol maj. En dehors de l'introduction d'une altération supplémentaire (dièze) on constate que la "montée" de la tonalité de do maj. à la tonalité voisine de sol maj. affecte le "sixième degré" qui s'élève d'un comma de Didyme ($\frac{81}{80}$) pour devenir le "second degré" de la nouvelle gamme — je veux dire que le "la" de sol maj. est plus haut que le "la" de do maj., et ceci d'un comma. C'est un des éléments de la richesse et de la cohérence qui appartiennent au jeu des grands interprètes. Et c'est ce qui explique aussi que pour moduler d'une tonalité donnée dans une tonalité voisine l'harmonie recherchera l'ambiguïté et évitera les notes dont la hauteur change, comme le montre l'exemple suivant :



10,2) *Attraction harmonique*

Depuis des siècles ([Cooke] p. 49) les musiciens ont constaté que certaines notes étaient "attirées" vers une note voisine ; Deryck Cooke ([Cooke] p. 90) en donne un résumé (do est la *tonique*) :

note / attraction	ré ♭	ré	fa	la ♭	la	si ♭	si
semi-tonale	↘ do		↘ mi	↘ sol		↘ la	↗ do′
tonale		↘ do			↘ sol		

Pour retrouver ces résultats mathématiquement, nous étudierons la dissonance des intervalles $\delta_Z(\text{do},x)$. Par exemple l'attirance *tonale* du "la" par le "sol" signifie-t-elle que :

$$\delta_Z(\text{do},\text{sol}) < \delta_Z(\text{do},\text{si}) \ ?$$

$$
\begin{array}{llll}
\delta_Z(\text{do},\text{do}) = 0 & < \delta_Z(\text{do},\text{ré}) & = \text{Log } 9 \\
\delta_Z(\text{do},\text{do}) = 0 & < \delta_Z(\text{do},\text{mi}) & = \text{Log } 5 \\
\delta_Z(\text{do},\text{mi}) = \text{Log } 5 & < \delta_Z(\text{do},\text{sol}^\flat) & = \text{Log } 25 \\
\delta_Z(\text{do},\text{sol}) = \text{Log } 3 & < \delta_Z(\text{do},\text{la}) & = \text{Log } 5 \\
\delta_Z(\text{do},\text{sol}) = \text{Log } 3 & < \delta_Z(\text{do},\text{si}) & = \text{Log } 15 \\
\delta_Z(\text{do},\text{do}') = \text{Log } 2 & < \delta_Z(\text{do},\text{la}\#) & = \text{Log } 9
\end{array}
$$

on voit qu'il y a parfaite cohérence avec les résultats de Deryck Cooke.

11) Conclusion

S'il m'est permis de tirer une philosophie de l'étude précédente, je dirai que la théorie qu'on a faite est "pythagoricienne" par opposition à la théorie classique qui est "néopythagoricienne" (termes de [Shanks]).

La substitution du corps des rationnels **Q** au corps des réels **R**, nous donne une latitude plus large pour expliquer les différents aspects de la perception musicale : distance mélodique (dont la loi de Weber-Fechner donne une approximation grossière et qui correspond à peu près à la distance ordinaire), distance harmonique (pour laquelle la loi de Weber-Fechner ne s'applique absolument pas et qui correspond à peu près à la dissonance du paragraphe 10), justesse expressive (paragraphe 10), etc.

Finalement cette théorie permet de réconcilier divers points de vue et d'expliquer comment les musiciens qui pratiquent la justesse naturelle peuvent s'entendre avec ceux qui n'ont pas ce privilège : toutes(1) les gammes chromatiques à douze degrés sont isomorphes entre elles (resp. isomorphes à **Z**) dans un isomorphisme qui conserve 2 (resp. l'envoie sur 12).

(1) Sauf la gamme de Serge Cordier (encadré 23 de la première partie).

12) Exercices

Paragraphes 3 et 4

1) Utiliser le critère du paragraphe 3 et le développement en fraction continue de $\frac{\text{Log } q}{\text{Log } p}$ pour obtenir des commas de $<2,3,5>$, $<2,3,5,7>$, etc..

(on pourra prendre $(p,q) = (\frac{3}{2},5), (2, \frac{15}{7})$, etc...)

2) Montrer que $\| r \| = \text{Log } h(r)$ est une "norme" sur $\mathbf{Q}_+^*$ au sens de la remarque du paragraphe 2.

Montrer que le critère du paragraphe 3 subsiste lorsque l'on remplace $\| \ \|$ par $\|| \ \||$.

Paragraphe 6

1) Montrer que les intervalles suivants sont dans le groupe des commas de la gamme de Zarlino à douze degrés :

$$\frac{5^3}{2^7}, \frac{3^{28}}{5^{19}}, \frac{2.5^5}{3^8}.$$

Paragraphe 7

1) Montrer que les intervalles suivants sont dans le groupe des commas de la gamme de Zarlino bis :

$$\frac{21}{20}, \frac{28}{27}, \frac{36}{35}, \frac{49}{48}.$$

2) Hindemith (p. 80) considère diverses "secondes majeures" $\frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{8}{7}$. Montrer qu'elles sont toutes dans le second degré de la gamme de Zarlino bis.

3) Hindemith (p. 71) considère les "tierces" suivantes :

$$\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{7}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{3^4}{2^6}.$$

Trouver leurs degrés dans la gamme de Zarlino bis.

4) Prendre $H = < \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^4}{2^4.5}, \frac{3^2.5^2}{2^5.7} >$

Montrer que le groupe quotient de $<2,3,5,7>$ par H est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Montrer que la classe de $\frac{3^2}{2^3}$ est un générateur de $<2,3,5,7>/_H$.

En déduire que cette gamme a 5 degrés (gamme pentaphonique du type Zarlino-bis).

Trouver les représentants des 5 premières classes de cette gamme.

Montrer que parmi les "tierces" de Hindemith (exercice 3) $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{2^5}{3^3}$ sont dans le premier degré et $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3^4}{2^6}$ dans le second degré.

Paragraphe 9

1) J'appelle "suite de Farey $\mathcal{F}_n$" la suite croissante des fractions $\frac{h}{k}$ telles que $1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n$ et $(h,k) = 1$ et je désigne par $\mathcal{F}_n^{-1}$ l'ensemble des inverses des $x \in \mathcal{F}_n$.

Montrer que, pour la distance harmonique, la boule fermée $B(1, \text{Log } n) = \mathcal{F}_n \cup \mathcal{F}_n^{-1}$.

Montrer que si $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ se suivent dans B(1, Log n), on a : $k+k' > n$ et $k \neq k'$.

Montrer que si $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ et $\frac{h''}{k''}$ se suivent dans B(1, Log n), on a :

$$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$$

et que si $\frac{h'}{k'} \in B(1, \text{Log } (n-1))$, on a :

$$\begin{cases} h' = h+h'' \\ k' = k+k'' \end{cases}$$

Montrer que si $\frac{h}{k}$ et $\frac{h'}{k'}$ se suivent dans B(1, Log n), on a :

$$kh' - hk' = 1$$

2) La hauteur h sur $\mathbf{Q}$ se prolonge naturellement au corps des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$.

On désigne par A le corps des nombres algébriques réels : $A = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$. Alors $(x,y) \longmapsto \text{Log } h(\frac{x}{y})$ est une distance sur A_+^* [Hellegouarch, 1].

(On pourra commencer par remarquer que $\|x\| = \text{Log } h(x)$ est une "norme" sur A_+^* au sens de la remarque du paragraphe 2).

Etudier la structure de groupe topologique de A_+^*. Généraliser la notion de suite de Farey.

Sujets d'étude

Paragraphe 3

1) Comparer les commas de $G \in \mathcal{S}$ pour la "norme" $\| \ \|$ et la norme $||| \ |||$ (voir exercice 2 des paragraphes 3 et 4).

Paragraphe 5

1) Démontrer que les convergentes de $\frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$ et les commas de $<2,3>$ sont les mêmes.

2) Dans le cas où $G = <p,q>$ peut-on préciser à partir de quel rang les convergentes de $\frac{\text{Log } q}{\text{Log } p}$ et les commas de $<p,q>$ sont les mêmes ?

3) Une classe de G/H peut-elle avoir plusieurs représentants de hauteur minimale ?

4) Etudier la croissance supposée des différentes gammes de Pythagore.

5) Est-ce que la gamme de Pythagore à 12 degrés est un sous-ensemble de celle à 41 degrés ?

6) Est-ce que la gamme de Pythagore à 12 degrés est un sous-ensemble de celle à 53 degrés ?

Paragraphes 6 et 7

1) Construire un algorithme efficace donnant les commas des groupes $<2,3,5,7>$, $<2,3,5,7,11>$ etc...

2) Etudier la croissance supposée des gammes de Zarlino et Zarlino bis.

Paragraphe 8

1) Expliquer l'efficacité de la formule donnant n_x.

Paragraphe 10

1) Utiliser la notion de dissonance (et plus généralement de hauteur dans un espace projectif sur **Q**) pour expliquer certaines règles de l'harmonie.

2) Est-ce que la notion de dissonance correspond à la perception harmonique d'une oreille éduquée, naïve ?

3) Comment les différentes gammes sont-elles perçues par une oreille éduquée, naïve ?

Paragraphe 11

1) Déterminer tous les sous-groupes H de $\mathbf{Q}_+^*$ tels que $\mathbf{Q}_+^*/H \simeq \mathbf{Z}$ et la classe de 2 soit la puissance douzième de l'un des générateurs.

2) Soit un corps de nombres algébriques $k \subset \mathbf{R}$ et soit un sous-groupe de type fini $G = \langle x_1,\ldots,x_n \rangle \subset K_+^*$, G étant de rang n. On considère un sous-groupe $H = \langle y_1,\ldots,y_{n-1} \rangle$ de G dont le rang est égal à $n-1$. Trouver des conditions sur les x_i et les y_j pour que G/H soit isomorphe à $\mathbf{Z}$.

3) On reprend les notations ci-dessus avec $K = \mathbf{Q}(5^{1/4})$. Peut-on trouver G et H pour que les représentants de G/H contiennent la gamme mésotonique (encadré 15 de la première partie).

RÉFÉRENCES

[BLUM] D. BLUM : "Casals et l'art de l'interprétation", Buchet/Chastel.

[BRUN] V. BRUN : "Euclidien algorithms and musical theory", L'Enseignement Mathématique, t. X, Genève, pp. 125-137.

[BUNTING] C. BUNTING : "Essay on the Craft of Cello-Playing", t. 2. Cambridge University Press (1982), p. 154

[COOKE] D. COOKE : "The Language of Music", Oxford University Press.

[CORDIER] S. CORDIER : "Piano bien tempéré et justesse orchestrale" Buchet/Chastel.

[DAUTREVAUX] J. DAUTREVAUX : "A propos de : Approximation en Musique" Bulletin A.P.M. n° 299 (juin 1975).

[DE CANDÉ] R. DE CANDÉ : "Histoire universelle de la Musique", Seuil.

[DUBOIS] E. DUBOIS : Thèse-Université Pierre et Marie Curie (17 mars 1980).

[HARDY] HARDY and WRIGHT : "An Introduction to the theory of numbers", Oxford.

[HELLEGOUARCH, 1] Y. HELLEGOUARCH : "Un aspect de la théorie des hauteurs" Journées arithmétiques, Caen (1980).

[HELLEGOUARCH, 2] Y. HELLEGOUARCH : "Scales", Comptes Rendus, Mathématiques, La Société Royale du Canada, vol. IV, n° 5 (oct. 1982) et vol. V, n° 2 (avr. 1983).

[HINDEMITH] P. HINDEMITH : "The craft of musical composition" Schott.

[LEIPP] E. LEIPP : "Acoustique Musicale", Masson, 1971.

[B. PARZYSZ] : L'Approximation en musique, bulletin A.P.M. n° 296 XII - 1974.

[SHANKS] D. SHANKS : "Solved and unsolved problems in Number Theory", Chelsea.

[STARK] H.M. STARK : "An introduction to Number Theory", Markham.

INDEX DES TERMES MUSICAUX

INDEX DES NOMS DE PERSONNES

BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

Sont indiqués pour chaque brochure la date de parution et le nombre de pages.

0. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités,* par L. Guerber et P.L. Hennequin, 1968, 232 p.

1. *Charte de Chambéry,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1968, 32 p.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes* par Jean Itard, 1969, 32 p.

5. *Eléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique* par J. Adda et W. Faivre, 1971, 52 p.

6. *Charte de Caen,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1972, 32 p.

8. *Mots I,* 1974, 100 p.

9. *Elem-Math I,* 1975, 56 p.

10. *Carrés magiques* par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.

11. *Mots II*, 1975, 108 p.

13. *Mathématique pour la formation d'adultes* (CUEEP) par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.

14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2e édition, 1976, 220 p.

15. *Mots III*, 1976, 136 p.

16. *Elem-Math II,* 1976, 56 p.

17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p.

19. *Elem-Math III, La division à l'école élémentaire,* 1977, 100 p.

20. *Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques,* 1977, 280 p.

21. *Géométrie au premier cycle, tome I,* 1977, 208 p.

22. *Géométrie au premier cycle, tome 2,* 1978, 328 p.

23. *Pavés et bulles* par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.

24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM),* 1978, 120 p.

25. *Mots IV,* 1978, 152 p.

26. *Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire,* 1978, 64 p.

28. *Analyse des données, tome I,* 1980, 248 p.

29. *Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire,* 1979, 192 p.

30. *Les manuels scolaires de mathématiques,* 1979, 280 p.

32. *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978* dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen. (Ce texte figure aussi dans le Bulletin n° 314).

33. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome I,* 1979, 248 p.

35. *Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes,* 1979, 104 p.

36. *Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire,* 1980, 64 p.

37. *Mots V,* 1980, 114 p.

38. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2,* 1981, 140 p.

40. *Analyse des données, tome 2,* 1980, 296 p.

41. *Fragments d'histoire des mathématiques,* 1981, 176 p.

42. *"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques,* 1981, 56 p.

43. *Mathématique active en Seconde,* 1981, 228 p.

44. *Jeu 1. Les jeux et les mathématiques,* 1982, 184 p. et 13 fiches.

45. *Mathématiques et Sciences Physiques en L.E.P., brochure U.d.P. — A.P.M.E.P.,* 1981, 48 p., gratuit.

46. *Mots VI : Grandeur — Mesure,* 1982, 134 p.

47. *Obstacles et déblocages en mathématiques, par M. Bruston et C. Rouxel,* 1982, 130 p.

48. *Evariste Galois (1811-1832), format 21×29,7,* 1982, 56 p.

49. *Elem-Math VII, Aides pédagogiques pour le cycle moyen,* 1983, 116 p.

50. *Du matériel pour les Mathématiques* (Journées de Poitiers 82), 1983, 100 p.

51. *Ciel, Passé, Présent,* par G. Walusinski, 1983, 222 p.

52. *Ludofiches 83* (19 fiches de Jeux), 1983.

53. *Musique et Mathématique,* par B. Parzysz et Y. Hellegouarch, 1983, 160 p.

54. *La Presse et les Mathématiques,* par M. Chouchan, 1983.

55. *Algèbre des Carrés magiques*, par J.-M. Groizard, 1983.

56. *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, par G. Audibert, 830 p.

D1. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.,* 1962-1979, 113 notices, 211 fiches.

D2. *Dictionnaire A.P.M.E.P.,* millésime 1980, 20 fiches.

*

* *

Publications de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. :

- *Initiation à la mathématique de base,* 213 p.
- *Initiation au langage mathématique, analyse d'une expérience d'enseignement,* par J. Adda, 190 p.