Gammes naturelles I

Yves HELLEGOUARCH (*Université de Caen*)

Si votre idée des gammes et de la justesse est basée sur l'accord du piano vous trafiquez dans la supercherie, pour dire les choses crûment ! Cette supercherie fut partiellement approuvée par J.-S. Bach et reçut l'appui total de son fils C.P.E. Bach, mais je ne pense pas que la seule vertu de ce nom illustre la préserve de toute critique !

Christopher Bunting [2]

Préambule

Alors que la théorie officielle de la musique est basée sur la notion d'échelle tempérée et est incapable de donner un fondement à l'attraction en musique ni même de justifier une distinction entre un la$^\flat$ et un sol$^\#$, les praticiens du même art enseignent que le la$^\flat$ est plus bas que le sol$^\#$ et que le premier est attiré vers le « sol » alors que le second est attiré vers le « la ».

Le texte qui suit est une version révisée d'une tentative déjà assez ancienne [15] de construction d'un modèle destiné à rapprocher la « musique théorique » de la « musique pratique » (comme aurait dit Euler [12]) tout en préservant la structure de groupe qui fait le succès populaire des échelles tempérées ($\mathbb{Z}$ doit agir sur les gammes abstraites).

Nous allons maintenant rappeler quelques faits bien connus de la pratique des instruments à cordes qui nous serviront de guide.

Quand on déplace l'index de la main gauche sur une corde de violoncelle, en *appuyant*, et que l'on met la corde en vibration (entre le doigt et le chevalet) on obtient un son dont la fréquence mesurée dans une unité convenable est

$\frac{1}{x}$, x étant l'abscisse de l'index comptée de 0 pour le chevalet à 1 pour le sillet ($x \in]0,1]$).

En revanche lorsque l'on déplace l'index de la main gauche sans *appuyer* et que l'on essaie de mettre la corde en vibration on peut :

1: soit échouer,

2: soit obtenir une harmonique naturelle du son de la « corde à vide » ($x = 1$) qui est déterminée de manière univoque lorsque $x = \frac{p}{q} \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, fraction irréductible « simple » et $q > 0$. Mesurée dans la même unité, la fréquence de cette harmonique est égale à q.

Lorsque x n'est pas rationnel mais simplement « proche » d'une fraction $\frac{p}{q}$ assez « simple » (q est un entier positif pas trop « grand ») l'harmonique naturelle sort quand même comme si $x = \frac{p}{q}$, mais plus ou moins « difficilement ».

Il serait épineux de préciser les notions topologiques qui sont en cause ici : « proximité de x et de $\frac{p}{q}$ ˇ, « simplicité de $\frac{p}{q}$ ˇ, « facilité de la production de l'harmonique », car elles dépendent de données « physiques » dont nous voulons justement faire abstraction (hauteur de l'index au-dessus de la corde, forme de l'index, nature de la corde, position de l'archet, vitesse de l'archet, pression de l'archet, etc.).

Nous modéliserons la situation en disant que la fonction qui donne la hauteur $h(x)$ de l'harmonique naturelle associée à $x \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc}]0,1] \cap \mathbb{Q} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & q \end{array}$$

étant entendu que $\frac{p}{q}$ est irréductible et $q \geqslant 1$.

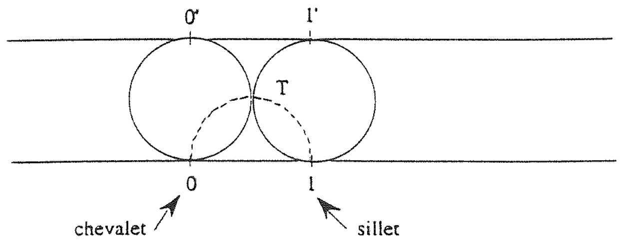
Remarque:

1: Si les conditions « physiques » étaient parfaites, on pourrait remplacer $\mathbb{Q}$ par sa complétion non-standard $^*\mathbb{Q}$ et estimer que si x est la partie standard de $\frac{p}{q}$, alors $h(x) = q$ si q est limité et $h(x) = \infty$ si q est infiniment grand (donc une harmonique « qui ne sort pas » serait celle d'un $x \in]0,1]$ qui serait irrationnel). Si l'on considère maintenant un instrument réel et une corde réelle, on constate que les « infiniment grands » ne sont pas très grands et que les harmoniques ne « sortent » plus en dehors d'une certaine suite de Farey $\mathcal{F}_n$ (voir [13 p. 23). Pour mon instrument $n = 13$.

Remarquons en passant que c'est l'étude des tempéraments musicaux qui a conduit Farey à la définition de ses suites et non ses activités de géologue [13] et [21] !

2: Il existe une interprétation géométrique de la fonction h qui rend compte des difficultés pratiques (qui semblent les mêmes en dessin et en musique) de la production des harmoniques naturelles et qui peut donner une intuition de la situation aux non-musiciens.

Dans un plan euclidien muni d'un repère traçons deux cercles de diamètre 1 situés au-dessus de l'axe des abscisses et touchant celui-ci en 0 et 1 :



Ces deux cercles se touchent en T et déterminent avec l'axe des abscisses un triangle curviligne $0T1$ dont le cercle inscrit touche l'axe des abscisses en $1/2$ et a pour diamètre $\frac{1}{2^2}$; ce cercle inscrit est l'inverse de la droite $0'1'$ par rapport au cercle de diamètre 01 qui est orthogonal à l'axe des abscisses, et aux deux cercles précédents.

En itérant cette construction on obtient les *cercles de Ford* des points de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$: ils sont tangents à l'axe des abscisses en $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, $q > 0$), de diamètre $\frac{1}{q^2}$ et situés dans le demi-plan supérieur (voir [18]).

La difficulté de dessiner ces cercles croît très vite et semble analogue à la difficulté de produire les harmoniques correspondantes.

1. Introduction musicale

Comme les motivations des définitions et constructions de ce travail peuvent paraître mystérieuses aux non-musiciens, je vais présenter un certain nombre de remarques préliminaires qui conduiront au point de vue que les paragraphes suivants vont développer de manière abstraite.

1.1. Nous allons commencer par modéliser la notion d'intervalle entre deux notes de fréquences x et y. Ces fréquences dépendent du choix de l'unité de fréquence, mais leur quotient $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ est un *invariant* : c'est l'*intervalle* entre x et y (souvent les traités officiels préfèrent prendre le logarithme de ce nombre).

Exemples : Dire que l'intervalle entre x et y est une *octave* signifie que $\frac{y}{x} = 2$, dire que c'est une *quinte pure* signifie que $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$, dire que c'est une *quinte tempérée* signifie que $\frac{y}{x} = 2^{7/12}$.

Remarquons toutefois que l'*octave de S. Cordier* est $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12/7}$, voir [4].

Il est clair que la théorie de la musique est beaucoup plus concernée par l'étude des intervalles (qui est en lien direct avec l'*oreille relative*) que par celle des fréquences absolues (qui est en lien direct avec *l'oreille absolue*) qui dépend des conventions sociales, des lieux et des époques (voir [7]).

1.2. On s'efforce depuis plusieurs millénaires (voir [8] et [11]) de réduire l'ensemble des intervalles de la théorie de la musique à un sous-groupe propre de $\mathbb{R}_+^*$: c'est ce que l'on appelle une *échelle musicale*.

Exemples: 1) L'*échelle officielle*, dite « échelle tempérée » ou « échelle de Werckmeister » ou « échelle de Bach » est $< 2^{1/12} >$, c'est-à-dire le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par $2^{1/12}$: c'est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^*$.

2) L'*échelle de Serge Cordier* est $< \left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/7} >$, c'est aussi une « échelle tempérée » mais il ne faut pas la confondre avec la précédente bien qu'il s'agisse encore d'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^*$.

3) L'*échelle de Pythagore* est $< 2, 3 >$, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par 2 et 3 : ce n'est pas un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^*$.

4) L'*échelle de Zarlino* est $< 2, 3, 5 >$, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par 2, 3 et 5 : ce n'est pas un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^*$.

5) L'*échelle mésotonique* est $< 2, 5^{1/4} >$ sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par 2 et $5^{1/4}$: il n'est pas discret.

6) Dans un travail célèbre [12] L. Euler a estimé que l'échelle $< 2, 3, 5, 7 >$ n'était pas intéressante pour les musiciens.

Nous dirons qu'une échelle musicale E est *naturelle* lorsque $E \subset \mathbb{Q}_+^*$ et $2 \in E$.

Exemples: Les échelles de Pythagore et Zarlino sont naturelles, les échelles tempérées et l'échelle mésotonique ne le sont pas.

1.3. Il n'est pas question de répéter ici tout le mal qui a été dit de l'échelle tempérée officielle [21]. Bornons-nous à signaler qu'un piano accordé selon cette échelle sonne tout à fait faux ([24] p. 134) et que cette échelle paraît inadéquate pour modéliser les théories de l'harmonie pour la raison qu'elle ne contient pas les intervalles correspondants aux harmoniques les plus simples (quinte pure redoublée par exemple).

Les difficultés ont été très bien formulées par L. Euler en 1766 lorsqu'il affirmait que « l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible ». On pourrait ajouter que les instruments, eux aussi, « aiment » les fractions simples. Nous appellerons « *principe d'Euler* » cette affirmation.

1.4. Les fractions (supérieures ou égales à 1) les plus simples sont $\dfrac{1}{1}$ (unisson), $\dfrac{2}{1}$ (octave), $\dfrac{3}{2}$ (quinte), $\dfrac{4}{3}$ (quarte juste), etc.

Selon une étude du psychologue C. Stumpf (1848-1936) 75 % des auditeurs sans formation perçoivent comme un son unique deux sons simultanés à l'octave,

50 % réagissent de même à la quinte, 33 % à la quarte, 25 % à la tierce, 20 % au triton, 10 % à la seconde ([6] p. 187).
Si l'on appelle « hauteur » de la fraction irréductible de dénominateur positif $\frac{p}{q}$, le nombre $h\left(\frac{p}{q}\right) := \sup(p, q)$ et si l'on applique le *principe d'Euler* on obtient ainsi :

nom	fraction	hauteur	pourcentage de C. Stumpf
octave	$\frac{2}{1}$	2	75%
quinte	$\frac{3}{2}$	3	50%
quarte	$\frac{4}{3}$	4	33%
tierce	$\frac{5}{4}$	5	25%
triton	$\frac{7}{5}$	7	20%
seconde	$\frac{9}{8}$	9	10%

Il est difficile de ne pas remarquer que si l'on désigne par $\pi(x)$ le nombre de la dernière colonne situé sur la ligne x, le produit $(h(x) - 1)\pi(x)$ reste à peu près constant ! On est donc conduit à définir une *distance harmonique* sur $\mathbb{Q}_+^*$ en posant :

$$d(x, y) := \operatorname{Log} h\left(\frac{y}{x}\right)$$

On constate aisément en vérifiant les axiomes de la distance (c'est un cas particulier d'un résultat plus général [14]) que :

Théorème 1. — *La fonction* $(x, y) \longmapsto \operatorname{Log} h\left(\frac{y}{x}\right)$ *est une distance invariante sur* $\mathbb{Q}_+^*$.

Il en résulte que sa restriction à une échelle naturelle E est encore une distance invariante sur E (voir l'annexe pour les autres échelles).

1.5. Etant donnée une échelle naturelle E nous allons chercher un moyen de donner des *noms* aux éléments de E et pour cela il faut construire un morphisme de groupes :

$$\varphi : E \to \mathbb{Z}, \quad \text{tel que } \varphi(2) > 0.$$

Si x est un élément de E, le *degré* de x sera $\varphi(x)$. Une « *gamme naturelle* » associée à E sera une partie Γ de E telle que l'on ait une bijection $j : \mathbb{Z} \to \Gamma$ vérifiant la condition suivante :

$j(n)$ est un élément de hauteur minimale de $\varphi^{-1}(n)$.

Alors se pose la question du choix des morphismes φ qui conduisent à des gammes utiles à la théorie de la musique...

1.6. La méthode d'accord des pianos par quintes et octaves [24] fournit l'idée de base, nous allons la préciser. Supposons que l'on veuille accorder un piano dont le « la_3 » est juste. Un procédé consiste à parcourir le « cycle » des quintes (intervalles de $< \frac{3}{2} >$) :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{la}, & \text{ré}, & \text{sol}, & \text{do}, & \text{fa}, & \text{si}^\flat & \text{mi}^\flat \\ \text{la}^\flat, & \text{ré}^\flat, & \text{sol}^\flat, & \text{do}^\flat, & \text{fa}^\flat, & \text{si}^{\flat\flat} & = ? \end{array}$$

En fait, si les quintes sont « justes » (égales à $\frac{3}{2}$) et non « tempérées » (égales à $2^{7/12}$) on ne peut pas retomber sur un « la », car l'équation :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^x$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbb{N}$.
Deryck Cooke ([3] p. 44) exprime ce fait de manière frappante en disant : « alors que l'équation désirée musicalement est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$, l'équation mathématique correcte est $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,013642\ldots$ »
Traduit en termes mathématiques, ce que le musicien souhaite c'est imposer la *relation* :

$$r = \frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1$$

dans le *groupe abélien libre* $< 2,3 > \subset \mathbb{Q}_+^*$; le groupe quotient n'étant alors rien d'autre que $\mathbb{Z}$. Si, finalement, on applique le principe d'Euler pour trouver un *système de représentants* des classes de $< 2,3 >$ modulo $< r >$ on trouve (miraculeusement !) la « gamme chromatique de Pythagore » telle qu'elle est décrite dans les livres d'Histoire de la musique [7].

2. Commas

Soient des nombres de $\mathbb{Q}_+^*$ que l'on note p, q, r, etc. Nous dirons que p, q, r, etc. sont des nombres multiplicativement indépendants dans $\mathbb{Q}_+^*$ si $\operatorname{Log} p, \operatorname{Log} q, \operatorname{Log} r$, etc. sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et nous noterons par $< p, q >, < p, q, r >$, etc. les sous-groupes de $\mathbb{Q}_+^*$ engendrés par $\{p, q\}, \{p, q, r\}$, etc. En fait nous penserons plus particulièrement à la suite :

$$\mathcal{S} \qquad < 2,3 >, \quad < 2,3,5 >, \ldots$$

dont nous désignerons l'élément général par G.
Il est bien connu que tous ces sous-groupes sont denses dans $\mathbb{Q}_+^*$ (voir [13]).
Nous avons montré dans l'introduction l'intérêt des approximations de 1 dans le groupes $G \in \mathcal{S}$: nous appelons *« commas »* de G les meilleures de ces approximations et nous en donnons la définition suivante.

Définition.- *Soit $G \in \mathcal{S}$ et $a \in G$. Nous dirons que a est un comma de G (ou meilleure approximation de 1 dans G) si et seulement si :*

i) $a \neq 1$

ii) $b \in G \setminus \{1\}$ *et* $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$ *entraînent* $h(b) > h(a)$

Remarques :

1) Si $a = p_1^{n_1} \dots p_h^{n_h}$ est un comma de G, alors p.g.c.d. $(n_1, \dots, n_h) = 1$.

2) Un comma de G ne reste pas toujours un comma dans un groupe $G' \supset G$. Par exemple $a = \dfrac{2^8}{3^5}$ est un comma de $< 2, 3 >$, mais ce n'est pas un comma de $< 2, 3, 5 >$.

3) Le critère suivant permet de construire un nombre fini de commas de G.

Critère : *Si* $G \in \mathcal{S}$ *et si* $a = \dfrac{b+1}{b} \in G$ *avec* $b \in \mathbb{Q}^*$, *alors* a *est un comma de* G.

Preuve – Soit $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*$ telle que $\dfrac{m}{n} > 1$ et $\operatorname{Log} \dfrac{m}{n} < \operatorname{Log} \dfrac{b+1}{b}$, nous voulons montrer que $m > b + 1$.

Comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{m}{n} < \dfrac{b+1}{b}$, on voit que $n > b$ et comme $m \geqslant n + 1 > b + 1$, on a le résultat. ∎

Le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de « commas absolus » de ce type dans un groupe de type fini, résulte du théorème des $S-$unités de Siegel ([20] ou [26]) qui est infiniment plus profond.

3. Commas des groupes de rang 2

Nous revenons à la situation du paragraphe 2 en prenant un sous-groupe *quelconque* de rang 2 de $\mathbb{Q}_+^*$ que l'on notera encore G. Si $\{p, q\}$ est une base de G, p et q sont multiplicativement indépendants et la recherche des commas de G équivaut à la recherche des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, tels que $(x, y) \neq (0, 0)$ et tels que $x \operatorname{Log} p + y \operatorname{Log} q$ soit voisin de 0. Ainsi $-\dfrac{x}{y}$ doit être une « bonne approximation » de l'irrationnel $\alpha = \dfrac{\operatorname{Log} q}{\operatorname{Log} p} = \operatorname{Log}_p(q)$ que l'on suppose > 1.

La recherche des bonnes approximations de α se fait habituellement par l'algorithme des fractions continues [27] : on construit ainsi une suite de fractions $\dfrac{p_n}{q_n}$, les « convergentes » de α, convergeant vers α selon le schéma :

$$\frac{q_0}{p_0} < \frac{q_2}{p_2} \dots < \alpha < \dots < \frac{q_3}{p_3} < \frac{q_1}{p_1}.$$

En posant (un peu arbitrairement) :

$$(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1} p_n, (-1)^n q_n)$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 2. — *La suite des rationnels* $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ *est monotone décroissante et tend vers 1. De plus, on a :*

$$p^{\frac{1}{2\mid y_{n+1}\mid}} < r_n < p^{\frac{1}{\mid y_{n+1}\mid}}$$

Preuve –

1) On sait que $p_n - q_n\alpha$ a le signe de $(-1)^{n-1}$, [27], donc :

$$x_n + y_n\alpha = (-1)^{n-1}[p_n - \alpha q_n] > 0$$

soit $r_n > 1$.

2) Maintenant :

$$\frac{\operatorname{Log} r_{n+1}}{\operatorname{Log} r_n} = \frac{x_{n+1} + \alpha y_{n+1}}{x_n + \alpha y_n} = -\frac{p_{n+1} - \alpha q_{n+1}}{p_n - \alpha b_n}.$$

Or on sait [27] que :

$$\left|\frac{p_{n+1} - \alpha q_{n+1}}{p_n - \alpha q_n}\right| < 1$$

d'où :

$$\frac{\operatorname{Log} r_{n+1}}{\operatorname{Log} r_n} < 1.$$

3) Les deux inégalités de l'énoncé équivalent à :

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < x_n + \alpha y_n < \frac{1}{q_{n+1}}$$

soit encore à :

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \mid p_n - \alpha q_n \mid < \frac{1}{q_{n+1}}$$

ce qui est bien connu [27]. ■

Exemple: Le calcul des convergentes de $\alpha = \dfrac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 2} = \operatorname{Log}_2(3)$ donne la suite de rationnels :

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^{12}}{2^{19}} > \frac{2^{65}}{3^{41}} > \frac{3^{53}}{2^{84}} > \ldots > 1.$$

Si nous posons : $r_{-1} = \dfrac{2}{1}$, $r_0 = \dfrac{3}{2}$, $r_1 = \dfrac{2^2}{3}$, etc. nous *constatons* que nous avons ainsi construit la suite des commas du groupe $G = < 2, 3 >$.

Ce fait est général en un certain sens.

Théorème 3. — *On suppose que p et q sont des entiers positifs premiers entre eux et tels que $1 < p < q$. Alors les commas supérieurs à 1 du groupe $G =< p, q >$ sont obtenus par le procédé décrit ci-dessus à partir des convergentes du nombre irrationnel $\alpha = \mathrm{Log}_p\, q$.*

Preuve –

1) Nous allons décrire un algorithme extrêmement élémentaire (il ne nécessite pas la connaissance de α!) pour construire les commas de $< p, q >$.

La première étape consiste à déterminer un entier $a_0 \geqslant 1$ tel que $p^{a_0} < q < p^{a_0+1}$; un tel entier existe parce que $p < q$.

Si on pose $r_0 = \dfrac{q}{p^{a_0}}$ et si nous comparons à l'algorithme classique ([27] p. 187) nous voyons que r_0 est associé à la première convergente $\dfrac{a_0}{1}$ de α. Supposons maintenant que nous ayons construit r_{n-2} et r_{n-1} (c'est le cas si $n = 1$ en prenant $r_{-1} = \dfrac{p}{1}$) alors on cherche $a_n \geqslant 1$ vérifiant la condition :

$$(r_{n-1})^{a_n} < r_{n-2} < (r_{n-1})^{a_n+1}$$

ceci est encore possible parce que $r_{n-1} < r_{n-2}$ et que r_{n-1} et r_{n-2} sont multiplicativement indépendants.

2) Une comparaison avec [27] p. 187-188, montre que l'on obtient un algorithme identique à l'algorithme classique, ce qui justifie a priori l'indépendance multiplicative de r_{n-1} et r_{n-2} et montre que $G = \langle r_{n-2}, r_{n-1} \rangle$.

3) Montrons que $r_n := r_{n-2}\, r_{n-1}^{-a_{n-1}}$ est un comma.
Soit $b = p^x q^y \in G \setminus \{1\}$ tel que :

$$\mid \mathrm{Log}_p(b) \mid = \mid x + y\, \mathrm{Log}_p\, q \mid < \mathrm{Log}_p(r_n) = x_n + y_n\, \mathrm{Log}_p\, q$$

avec $(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1} p_n,\ (-1)^n q_n)$.

Puisque l'on sait que $\dfrac{p_n}{q_n}$ est une meilleure approximation de $\mathrm{Log}_p\, q$ on a : $\mid y \mid > q_n$ et $\mid x \mid > p_n$ (la seconde inégalité résulte de la première et de $\mid \mathrm{Log}\, b \mid < \mathrm{Log}\, r_n$). On voit aussi que x et y ont des signes opposés et on en déduit que $h(b) > h(r_n)$ puisque p et q sont premiers entre eux.

4) Montrons que tout comma est un r_n.

Il suffit de reprendre le point de vue ci-dessus : si $a = p^x q^y$ est un comma, x et y doivent avoir des signes opposés et $\left|\dfrac{x}{y}\right|$ doit être une meilleure approximation de $\mathrm{Log}_p(q)$. D'après la théorie classique des fractions continues, $\left|\dfrac{x}{y}\right|$ est une convergente de $\mathrm{Log}_p(q)$. ∎

4. Groupes quotients et gammes pour le rang 2

Nous considérons un groupe $G =< p, q >$ où p et q sont des entiers multiplicativement indépendants et premiers entre eux et nous nous donnons un comma r_n de G. Nous nous proposons en premier lieu d'étudier le groupe quotient $G/ < r_n >$ et en second lieu d'étudier sa gamme.

4.1. Comme dans le paragraphe 3) on écrit $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ et on introduit aussi $r_{n-1} = p^{x_{n-1}} q^{y_{n-1}}$. On utilisera la relation classique :

$$(*) \qquad x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^{n-1}$$

Théorème 4. — *Désignons par N le groupe $< r_n >$. Alors G/N est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui est engendré par la classe de r_{n-1}.*

Preuve – Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(x_n, y_n)$ est un groupe sans torsion qui est engendré par la classe de (x_{n-1}, y_{n-1}).

1) Groupe sans torsion.

Montrons que si $h > 0$ la relation :

$$h(x, y) \in \mathbb{Z}(x_n, y_n)$$

entraîne que $(x, y) = k(x_n, y_n)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notre hypothèse équivaut à :

$$\begin{cases} hx = \ell\ x_n \\ hy = \ell\ y_n \end{cases}$$

pour un certain $\ell \in \mathbb{Z}$ et comme x_n et y_n sont premiers entre eux d'après la relation rappelée ci-dessus, on voit que h divise ℓ. Si l'on pose $\ell = hk$ et si l'on simplifie par h, on a le résultat.

2) Générateur.

Dire que (a, b) est un générateur de $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(x_n, y_n)$ revient à dire que tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ s'écrit :

$$(x, y) = h(a, b) + k(x_n, y_n)$$

donc que (a, b) et (x_n, y_n) constituent une base de $\mathbb{Z}^2$, ce qui est bien le cas si $(a, b) = (x_{n-1}, y_{n-1})$.

■

Théorème 5. — *Dans G/N la classe de p (*resp.q*) est égale à $\mid y_n \mid$ fois* (resp.$\mid x_n \mid$ *fois) la classe du générateur r_{n-1}.*

Preuve – Il suffit de démontrer cette propriété pour la classe de p, ce qui équivaut à :

$$p \equiv r_{n-1}^{\mid y_n \mid} \qquad \bmod N$$

ou bien (en notation additive) :

$$(1, 0) \equiv \mid y_n \mid (x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \bmod \mathbb{Z}(x_n, y_n).$$

Il résulte de $(*)$ que $\mid y_n \mid x_{n-1} + (-1)^{n+1} x_n y_{n-1} = 1$ ce qui prouve le résultat.

■

Dorénavant nous supposons que $p < q$. Puisque r_{n-1} est déterminé de manière *canonique* nous avons déterminé un *générateur canonique* g_n (la classe de r_{n-1}) dans le quotient $G/ < r_n > \cong \mathbb{Z}$ (« gamme abstraite »).

Définition.- *Soit φ_n l'application canonique :*

$$G \to H_n := G/ < r_n >$$

Le degré d'un intervalle x de l'échelle G est le nombre $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi_n(x) = g_n^h$.

Définition.- *La gamme chromatique Γ_n associée à la gamme abstraite $H_n := G/ < r_n >$ est une famille doublement infinie de représentants de plus petite hauteur des éléments de G modulo $< r_n >$.*

La première octave de cette gamme est formée par les représentants des classes de $g_n^0, g_n^1, \ldots, g_n^{\mid y_n \mid}$.

Remarques :

1) On voit de même que la classe de r_{n+1} engendre H_n et que l'on a en fait $r_{n-1} \equiv r_{n+1} \bmod < r_n >$. Mais ceci ne nous intéresse pas puisque $h(r_{n+1}) > h(r_{n-1})$.

2) Les musiciens s'intéressent surtout aux fréquences des intervalles de la première octave. Pour les octaves supérieures (ou inférieures) ils multiplient ces fréquences par une puissance adéquate de p, ce que nous ne ferons pas.

3) On montre facilement que si r_n est un comma ces représentatants sont uniques.

Exemples: Gammes de Pythagore.

On considère l'échelle $G =< 2, 3 >$ et on rappelle que ses commas sont :

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^{12}}{2^{19}} > \frac{2^{65}}{3^{41}} > \frac{3^{53}}{2^{84}} > \cdots > 1$$

1) $r_{-1} = \frac{2}{1}$, $H_{-1} = G/ < r_{-1} > \cong < 3 >$, $\Gamma_{-1} = \{3^n ; n \in \mathbb{Z}\}$

2) $r_0 = \frac{3}{2}$, $H_0 = G/ < r_0 >$, $\Gamma_0 = \{2^n ; n \in \mathbb{Z}\}$

3) $r_1 = \frac{2^2}{3}$, $H_1 = G/ < r_1 >$, $\Gamma_1 = \ldots 3^{-1}, 2^{-1}, 1, 2, 3, 6, 9, 18, \ldots$

4) $r_2 = \frac{3^2}{2^3}$, $H_2 = G/ < r_2 >$, la première octave de Γ_2 est $(1, \frac{3}{2}, 2)$. On voit que dans ce cas r_1 n'est pas l'élément de plus petite hauteur de la classe de g_2.

5) $r_3 = \frac{2^8}{3^5}$, $H_3 = G/ < r_3 >$ est la *gamme pentatonique*, la première octave de Γ_3 est $\left(1, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2^4}{3^2}, 2\right)$.

6) $r_4 = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$, $H_4 = G/ < r_4 >$ est la *gamme de Pythagore* proprement dite, la première octave de Γ_4 est :

$$\left(1, \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{2^2}{3}, \frac{3^6}{2^9}, \frac{3}{2}, \frac{2^7}{3^4}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{2^4}{3^2}, \frac{3^5}{2^7}, 2\right)$$

7) $r_5 = \dfrac{2^{65}}{3^{41}}$, $H_5 = G/ < r_5 >$ est la gamme de Janko (à 41 degrés dans une octave).

8) $r_6 = \dfrac{3^{53}}{2^{84}}$, $H_6 = G/ < r_6 >$ est la gamme de Mercator (à 53 degrés dans une octave).

GAMME DE PYTHAGORE A 41 DEGRES :

0	1	C do
1	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	
2	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	
3	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$D^\flat$ $ré^\flat$
4	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	
5	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	
6	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	
7	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	D ré
8	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	
9	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	
10	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$E^\flat$ $mi^\flat$
11	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	
12	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	
13	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$	
14	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	E mi
15	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	
16	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	
17	$\frac{2^{2}}{3}$	F fa
18	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	
19	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	
20	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$	
21	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$F^\#$ $fa^\#$
22	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	
23	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	
24	$\frac{3}{2}$	G sol
25	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	
26	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	
27	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$	$A^\flat$ $la^\flat$
28	$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	
29	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	
30	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	
31	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	A la
32	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	
33	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	
34	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$B^\flat$ $si^\flat$
35	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	
36	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	
37	$\frac{2^{12}}{3^{7}}$	
38	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	B si
39	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	
40	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	
41	2	C do

GAMME DE PYTHAGORE A 53 DEGRES :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{3^{24}}{2^{38}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{35}}{3^{22}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	$\frac{3^{26}}{2^{41}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$	$\frac{3^{21}}{2^{33}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$
C do				$D^\flat$ ré$^\flat$					D ré				$E^\flat$ mi$^\flat$				

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{3^{4}}{2^{6}}$	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	$\frac{2^{40}}{3^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^{2}}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{23}}{2^{36}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	$\frac{2^{37}}{3^{23}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{3^{25}}{2^{39}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$
E mi				F fa					$F^\#$ fa$^\#$				G sol				$A^\flat$ la$^\flat$

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
$\frac{3^{8}}{2^{12}}$	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	$\frac{2^{34}}{3^{21}}$	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{42}}{3^{26}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{31}}{3^{7}}$	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{39}}{3^{24}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2
				A la				$B^\flat$ si$^\flat$					B si				C do

Les exemples précédents conduisent à conjecturer que Γ_n est une *suite croissante* (au moins pour les gammes de Pythagore et la première octave !). Nous allons prouver cette conjecture dans le cas où $G =< p, q >$ avec $1 < p < q$, p et q entiers premiers entre eux. On utilise la relation $r_n = r_{n-2} r_{n-1}^{-a_n}$ du paragraphe 3.

Théorème 6. — *Les commas r_m pour $m < n-1$ sont les représentants de plus petite hauteur de leurs classes modulo $< r_n >$. Ces commas sont dans la première octave de Γ_n et apparaissent par ordre décroissant.*
Si $a_n \geqslant 2$, r_{n-1} apparaît également au premier degré avant r_{n-2}.
Les degrés des commas $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_{-1}$ dans $H_n = G/ < r_n >$ sont les dénominateurs des convergentes successives de $[1, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$.
De plus, la gamme Γ_n est croissante.

> **Preuve** – Les premières assertions résultent facilement de la relation rappelée ci-dessus.
> Montrons que si ν_i est l'élément général de Γ_n on a $\nu_i < \nu_{i+1}$.
> On se borne au cas où $i > 0$, car $\nu_{-i} = \nu_i^{-1}$ si $i > 0$, et on procède par récurrence sur i.
> Si $i = 1$, cela résulte des premières assertions.
> Soit $r = \nu_1$: on passe de ν_i à ν_{i+1} en multipliant ν_i par r et en effectuant éventuellement une correction soit par r_n soit par r_n^{-1} (en fonction de a_n) : désignons par r' cette correction.
> Puisque ν_i est de plus petite hauteur dans sa classe $h(r'\nu_i) > h(\nu_i)$. Maintenant on voit que soit $r\nu_i$ est de plus petite hauteur dans sa classe, soit $r'r\nu_i$ est l'élément de plus petite hauteur car $r'r\nu_i$ et $rr'^{2r}\nu_i$ sont de même type c'est-à-dire qu'ils ont tous les deux une puissance de p en numérateur ou tous les deux une puissance de q en numérateur. Il en résulte que $h(r'^{2r}\nu_i) > h(r'r\nu_i)$. ∎

Remarque. Le nombre de corrections dans la première octave est égal à $| x_{n-1} |$ si $a_n > 1$ et à $| x_{n-2} |$ si $a_n = 1$.

La seconde partie de l'article Gammes naturelles *paraîtra dans le prochain numéro de la Gazette.*

Gammes naturelles (suite)

Yves HELLEGOUARCH (*Université de Caen*)

L. Euler a affirmé en 1766 que « l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible ».

Dans les quatre premiers paragraphes nous avons donné un sens précis à cette affirmation en considérant l'échelle musicale constituée par le sous-groupe $< 2,3 >$ *de* $\mathbb{Q}_+^*$, *une « gamme abstraite »* $< 2,3 > /N$ *où* N *est un sous-groupe de rang 1 de* $< 2,3 >$ *engendré par un comma et la « gamme concrète » correspondante formée des représentants de plus petite hauteur des classes de* $< 2,3 >$ *modulo* N.

5. Limite des gammes de Pythagore Γ_n lorsque $n \to \infty$

On suppose ici que l'échelle choisie est $G =< p,q >$ où p et q sont des entiers premiers entre eux tels que $1 < p < q$ et on reprend les notations du §3.
Soit $r \in G$ et soit Γ_n une gamme de G. Lorsque n tend vers l'infini le degré $d_n(r)$ de r dans la gamme Γ_n tend vers $\pm\infty$ si $r \neq 1$, mais nous allons voir que $\dfrac{d_n(r)}{d_n(p)} = \dfrac{d_n(r)}{\mid y_n \mid}$ possède une limite dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7. — *Soit* $r \in G =< p,q >$ *et soit* $n \in \mathbb{N}$. *Lorsque* n *tend vers l'infini* $\dfrac{d_n(r)}{d_n(p)}$ *tend vers* $\mathrm{Log}_p(r)$.

Preuve – Par définition nous avons :

$$r \equiv r_{n-1}^{d_n(r)} \quad \text{modulo } < r_n >$$

Posons $r = p^x q^y$, on a alors :

$$\begin{cases} x = d_n(r)x_{n-1} + hx_n \\ y = d_n(r)y_{n-1} + hy_n \end{cases} \qquad h \in \mathbb{Z}$$

et en éliminant h entre ces deux équations, on trouve :

$$d_n(r) = \frac{y_n x - x_n y}{y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}}$$

En se rappelant que $\mid y_n \mid x_{n-1} + (-1)^{n+1} x_n y_{n-1} = 1$ on en déduit que :

$$\frac{d_n(r)}{\mid y_n \mid} = x + y\frac{p_n}{q_n}.$$

Comme $\dfrac{p_n}{q_n}$ tend vers $\mathrm{Log}_p(q)$, on voit que $\dfrac{d_n(r)}{d_n(p)}$ tend vers $\mathrm{Log}_p(r)$. ∎

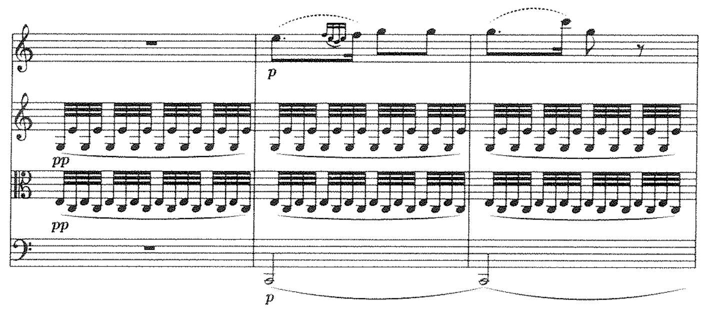
Remarques: 1) Lorsque r est donné dans G, il devient le représentant de plus petite hauteur de sa propre classe lorsque n est assez grand.

2) On peut interpréter le théorème 6 en disant que les limites des gammes de Pythagore sont des gammes tempérées continues, ce qui correspond bien au caractère « olympien » des tempéraments correspondants.

3) On a en fait donné une nouvelle construction des logarithmes de base entière des nombres rationnels !

6. Gammes des groupes de rang 3

Les musiciens qui ont la chance de jouer le quatuor en ut avec flûte de Mozart, savent que le second mouvement contient un passage d'une clarté harmonique intense



lorsque les instruments jouent dans un tempérament convenable : les tierces majeures mi/do de l'alto doivent être pures (intervalle 5/4) ce qui rend le do grave inévitable comme octave du son différentiel (ou son de Tartini) de fréquence 5-4.

Quant à la tierce mineure sol/mi (intervalle 6/5) entre le violon et l'alto, elle ne fait que renforcer le son différentiel précédent (6-5=1).

L'échelle musicale de ce quatuor doit donc contenir les nombres premiers $2, 3$ et 5 : ce doit être au moins l'échelle de Zarlino $< 2, 3, 5 >$ (et le passage serait encore plus beau si l'on remplaçait le violoncelle par une contrebasse).
On peut définir les commas du groupe $G =< 2, 3, 5 >$ comme on l'a fait au paragraphe 2 et on trouve :

$$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{5}{2^2}, \frac{2.3}{5}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2.5}{3^2}, \frac{2^4}{3.5}, \frac{5^2}{2^3.3}, \frac{3^4}{2^4.5} = \text{ comma de Didyme,}$$

$$\frac{2^{11}}{3^4.5^2}, \frac{5^6}{2^6.3^5}, \frac{3^8.5}{2^{15}}, \frac{2^{38}}{3^2.5^{15}}, \ldots$$

Nous allons maintenant considérer le groupe quotient de $G =< 2, 3, 5 >$ par le sous-groupe $< r, r' >$ engendré par $r = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ et $r' = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} 5^{\gamma'}$.

Théorème 8. — *Soient r et $r' \in G$ et $N =< r, r' >$.*
1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est égal à 1, alors G/N est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a 3^b 5^c$ est un générateur de G/N équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c = \pm 1.$$

Preuve –
1) Dire que p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 1$ équivaut à affirmer l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \pm 1$$

en vertu du théorème de Bézout.

2) Mais cette dernière condition signifie que $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ constituent une base de $\mathbb{Z}^3$.
Si nous posons $K = \mathbb{Z}(\alpha, \beta, \gamma) + \mathbb{Z}(\alpha', \beta', \gamma')$, nous voyons que $\mathbb{Z}^3/K$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par la classe de (a, b, c). Mais ceci est juste la forme additive du résultat que nous voulons obtenir. ∎

Exemples : Nous allons « améliorer » les gammes de Pythagore, correspondant aux groupes $< 2, 3 > / < r >$, que nous avons obtenues dans le paragraphe 4.
Pour chaque comma r de $< 2, 3 >$ nous chercherons un comma r' de $G =< 2, 3, 5 >$ qui « dépende » de 5 et qui satisfasse au théorème précédent : on posera $N =< r, r' >$.
Soit φ la projection canonique $G \to G/N$ et soit $P = \varphi(< 2, 3 >)$. Comme $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap < 2, 3 > = < r >$ on voit que P est isomorphe au groupe quotient $< 2, 3 > / < r >$ dont on était parti (mais certains représentants de ce groupe doivent être remplacés par des éléments de $< 2, 3, 5 >$ de plus petite hauteur dans le groupe G/N).

Finalement le nombre de degrés[1] de G/N dans une octave est égal à celui de P multiplié par l'indice de P dans G/N.
Lorsque cet indice est égal à 1, on dira que la gamme obtenue *affine* notre gamme de Pythagore, sinon on dira que l'on a obtenu une « *nouvelle gamme* ».

1) $r = \dfrac{2^2}{3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	2	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

2) $r = \dfrac{3^2}{2^3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

3) $r = \dfrac{2^8}{3^5}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

4) $r = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$	$\frac{5^6}{2^6\times 3^5}$
s	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$

On voit donc apparaître des phénomènes intéressants dans les cinquièmes colonnes des trois premiers tableaux ainsi que dans les trois dernières colonnes du dernier tableau. Nous allons étudier en détail les gammes correspondantes que nous désignerons sous le nom générique de gammes de Zarlino (du nom de la quatrième du dernier tableau).

$(r, r') = \left(\dfrac{2^2}{3}, \dfrac{5^2}{2^3\times 3}\right)$: deux degrés (nouvelle gamme)

[1] la notion de degré est définie comme pour le rang 2.

$\mathbb{Z}$	0	1	2
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	2

$(r,r') = \left(\frac{3^2}{2^3}, \frac{5^2}{2^3\times 3}\right)$: quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = \left(\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3\times 3}\right)$: dix degrés[2] (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquences	1	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3.2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times 5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{5^2}{2^3\times 3}\right)$: vingt-quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^6}{2^7\times 5}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^6\times 5}{3^5}$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2\times 5}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{2^3\times 5}{3^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^5}{2^5\times 5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^8\times 5}{3^6}$

20	21	22	23	24
$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{2^5\times 5}{3^4}$	2

Les deux derniers commas du dernier tableau donnent encore des nouvelles gammes (mais dans le dernier cas, la gamme n'est pas croissante !).

[2] L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 10 degrés (Luc Etienne).

En revanche la quatrième colonne du dernier tableau ne nous donne pas une nouvelle gamme. Dans ce cas on a $(r, r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4.5}\right)$: c'est la gamme de Zarlino proprement dite, elle affine la gamme de Pythagore :

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquences	1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \times 5}{2^3}$	2

voir plus loin un tableau des fréquences des 60 premiers degrés (ces fréquences sont croissantes) de cette gamme de Zarlino.

ZARLINO :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2	$\frac{5^2}{2^2.3}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^2.3}{5}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{5^2}{3^2}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{5^2}{2.3}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^3.3}{5}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^3}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	$\frac{2^2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^4.3}{5}$	2.5	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^3.3^2}{5}$	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{5^2.2}{3}$	2.3^2	$\frac{3.5^2}{2^2}$	$2^2.5$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$\frac{2^4.3^2}{5}$	2.3.5	2^5

7. Attraction harmonique, justesse expressive

Soit une gamme Γ construite selon les principes précédents et représentant le groupe quotient G/N et soient x et $y \in \Gamma$.
Nous noterons par d la distance harmonique sur $\mathbb{Q}_+^*$ et par $\delta_\Gamma(x,y)$ le nombre $d(xN, yN)$.
$\delta_\Gamma(x,y)$ sera appelé la « dissonance » de l'intervalle $\dfrac{y}{x}$ dans la gamme Γ.

Proposition.- *Si z désigne le représentant de la classe de $\dfrac{y}{x}$ dans la gamme Γ, on a :*

$$\delta_\Gamma(x,y) = \operatorname{Log} h(z).$$

Preuve –

$$d(xN, yN) = \inf\{d(xu, yv); u, v \in N\} = \inf\{\operatorname{Log} h\Big(\frac{y}{x}w\Big); w \in N\} = \operatorname{Log} h(z).$$

■

Nous allons montrer maintenant comment cette notion de dissonance permet de retrouver des notions musicales inexplicables à partir de la gamme tempérée T. Dans la suite, P désignera la gamme de Pythagore à 12 degrés et Z celle de Zarlino.
Hindemith remarque ([22] p. 55) que bien que les théoriciens de la musique ne soient d'accord sur rien, ils le sont cependant sur l'ordre de « parenté » décroissante des degrés de la gamme.
L'ordre que donne Hindemith est le suivant : unisson, octave, quinte, quarte, sixte majeure, tierce majeure, tierce mineure, etc.[3]
Il ajoute que la quarte augmentée (ou quinte diminuée) se trouve très loin.
Nous allons comparer ce qui se passe dans nos trois gammes[4]

	unisson	octave	quinte	quarte	sixte majeure	tierce majeure	tierce mineure	sixte mineure	quarte augment.
δ_P	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 27	Log 81	Log 32	Log 128	Log 729
δ_Z	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 25
δ_T	0	Log 2	$\frac{7}{12}$ Log 2	$\frac{5}{12}$ Log 2	$\frac{3}{4}$ Log 2	$\frac{1}{3}$ Log 2	$\frac{1}{4}$ Log 2	$\frac{2}{3}$ Log 2	$\frac{1}{2}$ Log 2

Comme la notion de dissonance dans la gamme de Zarlino reproduit assez bien l'ordre constaté par Hindemith, nous choisirons cette gamme dans la suite :

3 Comparer avec les expériences de C. Stumpf, §1.
4 Voir l'annexe pour la gamme tempérée T.

0 (unisson)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

7.1. Attraction harmonique

Depuis des siècles les musiciens ont constaté que certaines notes étaient « attirées » par d'autres ou que, plus exactement, certains intervalles avaient tendance à se « résoudre » dans des intervalles voisins ; Deryck Cooke ([3] p. 90) en donne un résumé que l'on va représenter par un tableau dans lequel le zéro est le degré de la note fondamentale (tonique).

		degré de la note supérieure						
		1	2	5	8	9	10	11
type	semi-tonal	$\downarrow 0$		$\downarrow 4$	$\downarrow 7$		$\downarrow 9$	$\uparrow 12$
	tonal		$\downarrow 0$			$\downarrow 7$	$\downarrow 8$	

Essayons de retrouver les attractions semi-tonales à partir de la gamme chromatique ci-dessus : nous dirons que la note n entourée de n_g et n_d se *résout* en n_g (resp .n_d) si :

$$h(n_g) < h(n_d)\Big(\text{resp }.h(n_g) > h(n_d)\Big) \text{ et } h(n) > h(n_g)\Big(\text{resp }.h(n) > h(n_d)\Big)$$

A partir de cette définition nous trouvons les attractions semi-tonales suivantes :

1	2	3	4	6	8	10	11
$\downarrow 0$	$\uparrow 3$	$\uparrow 4$	$\uparrow 5$	$\uparrow 7$	$\downarrow 7$	$\downarrow 9$	$\uparrow 12$

Pour trouver les attractions tonales, il suffit de remplacer les notes voisines à un degré par les notes voisines à deux degrés dans la définition, on trouve :

2	3	5	6	9	10
$\downarrow 0$	$\uparrow 5$	$\uparrow 7$	$\downarrow 4$	$\downarrow 7$	$\uparrow 12$

Dans l'ensemble on a un bon accord avec les résultats de D. Cooke, excepté pour la quarte juste (5) en ce qui concerne l'attraction semi-tonale (on trouve le contraire) et la septième mineure (10) en ce qui concerne l'attraction tonale (mais on ne trouve pas le contraire !).

7.2. Justesse expressive

La plupart des instrumentistes à cordes et des chanteurs pratiquent la « justesse expressive » ([1] ch. V) c'est-à-dire qu'ils modifient la hauteur des sons qu'ils utilisent par de légers « commas » (ce qui ne change pas la classe modulo N) afin de jouer plus juste en fonction du contexte.

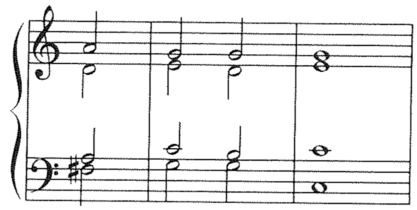
Nous allons illustrer cette pratique par un exemple utilisant la gamme de Zarlino.

Nous présenterons dans un tableau les fréquences des sons des gammes majeures de do, sol, fa et ré. Pour passer des fréquences de do majeur à celles des tonalités ci-dessus on multiplie par $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ et $\frac{3^2}{2^3}$.

	do	do#	ré	mi	fa	fa#	sol	la	si$^\flat$	si	do
do maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
sol maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	2
fa maj.	1		$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$		2
ré maj.		$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	

Dans la théorie de la musique, sol majeur et fa majeur sont considérées comme des tonalités voisines de do majeur, et ré majeur comme une tonalité voisine de sol majeur. En dehors de l'introduction d'une altération supplémentaire (dièze) on constate que la « montée » de la tonalité de do majeur à la tonalité voisine de sol majeur affecte le « sixième degré » qui s'élève d'un comma de Didyme $\left(\frac{81}{80}\right)$ pour devenir le « second degré » de la nouvelle gamme - je veux dire que le « la » de sol majeur est plus haut que le « la » de do majeur, et ceci d'un comma[5]. C'est un des éléments de la richesse et de la cohérence qui appartiennent au jeu des grands interprètes. Et c'est ce qui explique aussi que pour moduler d'une tonalité donnée dans une tonalité voisine l'harmonie recherchera l'ambiguïté et évitera les notes dont la hauteur change, comme le montre l'exemple suivant :

[5] le $fa^{\#}$ en sol majeur est également un comma de Didyme au-dessous de celui de notre gamme chromatique et le $si^\flat$ de fa majeur est un comma au-dessous de celui de notre gamme chromatique.



En termes plus mathématiques, on peut dire que le système de facteurs de notre gamme est cohomologiquement trivial mais non constant et que cette non constance est la cause de la justesse expressive.

Conclusion

Les quelques remarques du paragraphe 7 font apercevoir comment la substitution de $\mathbb{Q}_+^*$ à $\mathbb{R}_+^*$ permet d'enrichir le vocabulaire de la perception dans la théorie musicale : *distance mélodique* (dont la loi de Weber-Fechner donne une approximation grossière et qui correspond à peu près à la distance ordinaire), *distance harmonique* (pour laquelle la loi de Weber-Fechner ne s'applique absolument pas), *justesse expressive*, etc.
Mais cette théorie permet aussi de réconcilier les divers points de vue et d'expliquer comment les musiciens qui pratiquent la justesse naturelle peuvent comprendre ceux qui n'ont pas ce privilège : toutes les gammes abstraites $H = G/$ <commas> sont des espaces homogènes sur $\mathbb{Z}$ et on a :

$$\deg(n * x) = n + \deg(x)$$

lorsque $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in H$. Pourtant c'est le contexte le plus riche qui permet de donner un sens (# et ♭) aux modèles appauvris !

Appendice

1. Prolongement de la fonction h à $\overline{\mathbb{Q}}^*$.

On désigne ici par $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$) dont on ne garde que la structure de groupe multiplicatif (ainsi $2^{1/12} \in \overline{\mathbb{Q}}^*$). On sait ([14] et [23]) que h possède un prolongement naturel à $\overline{\mathbb{Q}}^*$:

$$\overline{h} : \overline{\mathbb{Q}}^* \to \mathbb{R}_+^*$$

et que $\overline{h}(x^n) = \overline{h}(x)^n$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ (on sait aussi que si $\overline{h}(x) = 1$, alors x est un élément de torsion de $\overline{\mathbb{Q}}^*$). Cette remarque nous permet de définir une distance harmonique sur les gammes tempérées de Werckmeister et S. Cordier et sur la gamme mésotonique (et aussi sur $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_+^*$).
Puisque $\overline{h}(2^{n/12}) = \overline{h}(2)^{n/12} = 2^{n/12}$, cette distance sera d (tonique, $n^{ième}$ degré) $= \dfrac{n}{12} \operatorname{Log} 2$ pour la gamme officielle, et d (tonique, $n^{ième}$ degré) $= \dfrac{n}{7} \operatorname{Log} \dfrac{3}{2}$ pour la gamme de S. Cordier : on retrouve la distance ordinaire. Pour la gamme mésotonique, cependant, on obtient une sorte de compromis entre les gammes naturelles et les gammes tempérées :

degré	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	$\frac{2^3}{5^{\frac{5}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{3}{4}}}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^3}$	$5^{\frac{1}{4}}$
nom	do	ré$^\flat$	ré	mi$^\flat$	mi	fa	fa$^\#$	sol
$d(1,x)$	0	$3\operatorname{Log}2$	$\frac{1}{2}\operatorname{Log}5$	$2\operatorname{Log}2$	$\operatorname{Log}5$	$\operatorname{Log}2$	$\frac{3}{2}\operatorname{Log}5$	$\frac{1}{4}\operatorname{Log}5$

degré	8	9	10	11	12
x	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^2}$	2
nom	sol$^\#$	la	si$^\flat$	si	do
$d(1,x)$	$2\operatorname{Log}5$	$\frac{3}{4}\operatorname{Log}5$	$2\operatorname{Log}2$	$\frac{5}{4}\operatorname{Log}5$	$\operatorname{Log}2$

Une évaluation numérique de ces nombres montre qu'ils correspondent bien à l'intuition harmonique. Notons que :

$$\begin{cases} d(\text{do}, \text{do}^\#) & > d(\text{do}, \text{ré}^\flat) \\ d(\text{do}, \text{sol}^\#) & > d(\text{do}, \text{la}^\flat) \end{cases}$$

2. Dissonance des accords

Lorsqu'un accord de n notes est joué dans une échelle naturelle, on pourrait penser que la hauteur du point projectif correspondant dans $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{Q})$ est un bon candidat pour mesurer la dissonance de l'accord. Cependant le diamètre de cet ensemble de notes, pour la distance harmonique, semble être un dangereux concurrent !

3. Commas

Un grand nombre de commas pour un grand nombre de groupes de S ont été calculés à l'aide d'un algorithme de Philippe Luquet (mémoire de maîtrise, Caen). D'autre part l'algorithme d'E. Dubois [10] fournit aussi des commas (pas nécessairement *tous* les commas).

Bibliographie

[1] D. BLUM - *Casals et l'art de l'interprétation ;* Buchet/Chastel, Paris 1980.

[2] C. BUNTING - *Essay on the Craft of Cello-Playing ;* t. 2, Cambridge University Press 1982, p. 154.

[3] D. COOKE - *The Language of Music ;* Oxford University Press, 1963.

[4] S. CORDIER - *Piano bien tempéré et justesse orchestrale ;* Buchet/ Chastel, Paris 1982.

[5] J. DAUTREVAUX - *A propos de : Approximation en Musique ;* Bulletin A.P.M. $n°$ 299 (juin 1975).

[6] R. DE CANDE - *Histoire Universelle de la Musique ;* t. II, Seuil, Paris 1978.

[7] R. DE CANDE - *Dictionnaire de Musique ;* Microcosme/Seuil, 1961.

[8] A. DANIELOU - *Traité de Musicologie comparée ;* Hermann, actualités scientifiques et industrielles 1265, Paris 1959.

[9] A. DANIELOU - *Music and the Power of Sound ;* Inner Traditions, Rochester, Vermont, 1995.

[10] E. DUBOIS - *Thèse ;* Université P. et M. Curie, 17 mars 1980.

[11] E. EMERY - *Temps et Musique ;* Dialectica, L'Age d'Homme, 1975.

[12] L. EULER - *Essai d'une nouvelle théorie de la musique ;* in « Musique Mathématique » Paris Librairie Scient. et Phil. 1865.

[13] G.H. HARDY et E.M. WRIGHT - *An introduction to the theory of numbers ;* Oxford Un. Press, 1956.

[14] Y. HELLEGOUARCH - *Un aspect de la théorie des hauteurs ;* Journées arithmétique, Caen, 1980.

[15] Y. HELLEGOUARCH - *Scales ;* Comptes-Rendus, Mathématiques, La Société Royale du Canada, vol. IV, $n°$ 5 (oct. 1982) et vol. V, $n°$ 2 (avr. 1983).

[16] Y. HELLEGOUARCH - *Gammes Naturelles ;* in Musique et Mathématiques, éd. B. Parzysz, APMEP $n°$ 53, Paris 1983.

[17] Y. HELLEGOUARCH - *L'Essai d'une nouvelle théorie de la musique de Leonhard Euler ;* in Destin de l'Art, desseins de la Science, actes du colloque de Caen 1986, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1992.

[18] Y. HELLEGOUARCH - *Ford hyperspheres, a general approach ;* C.R. Math. Acad. Sci. Canada, vol. XI, oct. 1989.

[19] Y. HELLEGOUARCH - *A la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique ;* Marsyas, $n°$ 22, juin 1992.

[20] Y. HELLEGOUARCH - *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles ;* Masson, Paris, 1997.

[21] H. HELMHOLTZ - *On the Sensations of Tone ;* Dover, New York, 1954.

[22] P. HINDEMITH - *The craft of musical composition ;* Schott, Londres, 1945.

[23] S. LANG - *Fundamentals of Diophantine Geometry ;* Springer, Berlin, 1983.

[24] E. LEIPP - *Acoustique Musicale ;* Masson, Paris, 1971.

[25] B. PARZYSZ - *L'approximation en Musique ;* Bull. APM $n°$ 296, XII, 1974.

[26] J.H. SILVERMAN - *The Arithmetic of Elliptic Curves ;* Springer Berlin, 1985.

[27] H.M. STARK - *An Introduction to Number Theory ;* The MIT Press, Cambridge Mass. and London Eng., 1991.

⋆ ⋆ ⋆